

## Übungsaufgaben zu Kapitel 1.3, Gleichungen

### Kapitel 1.3.1, Quadratische Gleichungen

a) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen nach der Variablen  $x$ !

1)  $2x - (x + 2)^2 = (x - 2)^2 - 4(x + 1)$       $D = \mathbb{R}$

2)  $\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 2x - 4} = 1$       $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid 2x^2 + 2x - 4 = 0\}$

3)  $\frac{a^2(1-x)^2 + (ax-b)^2}{a^2(1-x)^2 - (ax-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$       $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid a^2(1-x)^2 - (ax-b)^2 = 0 \vee a^2 - b^2 = 0\}$

4)  $\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$       $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid (a-x)^2 - (x-b)^2 = 0 \wedge a^2 - b^2 = 0\}$

5)  $\frac{4}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}$       $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$

6)  $\frac{7-x}{11-2x} + \frac{4x-5}{3x-1} = 2$       $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{11}{2}; \frac{1}{3} \right\}$

7)  $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$       $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

8)  $\frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1$       $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

9)  $\frac{x+11}{x+3} = \frac{2x+1}{x+5}$       $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, -3\}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen!

1)  $4x^2 + 4x - 48 = 0$      2)  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

3)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$      4)  $\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)(x^2 + 4) = 0$

5)  $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

6)  $\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$       $a \neq \pm b$

c) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, sowie die Lösungsmenge!

$$1) \frac{15x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1$$

$$2) \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}$$

$$3) \frac{5}{x+2} + \frac{3x}{x-3} = \frac{2x^2+11x-6}{x^2-x-6}$$

$$4) 2x - (x+2)^2 = (x-2)^2 - 4(x+1)$$

$$5) \frac{x^2+2x}{2x^2+2x-4} = 1$$

$$6) \frac{7-x}{11-2x} + \frac{4x-5}{3x-1} = 2$$

$$7) \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x^2-2x-1}{x^2-5x+6}$$

$$8) \frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1$$

$$9) \frac{x+11}{x+3} = \frac{2x+1}{x+5}$$

$$10) x^6 + 2x^5 - 3x^4 = 0$$

$$11) x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

$$12) 1 - ax + x = (1 - ax)x$$

### Kapitel 1.3.2, Bi-quadratische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Bi-quadratischen Gleichungen nach der Variablen  $x$ !

$$1) x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$2) x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

$$3) 1 - ax + x = (1 - ax) \cdot x$$

### Kapitel 1.3.4, Wurzelgleichungen

a) Bei den folgenden Aufgaben kommt es darauf an, zusammenzufassen und im Nenner die

Wurzel zu beseitigen.

$$1) \frac{162m^{-2}n^4}{375a^2b^3} \div \frac{54(mn)^3}{150a^2b^{-1}}$$

$$2) \sqrt[6]{vw^3} \cdot \sqrt[4]{u^5v^8w^{-2}} \cdot \sqrt{uv^3}$$

$$3) (\sqrt{a})^{-2} \cdot \left( \sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2$$

$$4) \frac{5a^n b^{n+4} c^{2n+1}}{abx^{n+1} y^{n+2} z^{n+3}} \div \frac{3a^{n-1} b^3 c^{n+1}}{2xy^{2-n} z^{3-n}}$$

$$5) \frac{4(2ab)^{\frac{3}{4}} (a+2b)^{-1}}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2ab^4}\sqrt{2}}$$

b) Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen nach der Variablen  $x$ !

$$1) \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+2x-1}}}{\sqrt{x+5+x^2-1}} + 1 = 0$$

$$2) 7 + 3\sqrt{2x+4} = 16$$

$$3) \sqrt{2x+19} + 5 = 0$$

$$4) \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$$

$$5) \sqrt{x}\sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-7x+3} = 0$$

$$6) \frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$$

$$7) \sqrt{x+4} - \sqrt{x-8} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x+13} = 0$$

$$8) \sqrt{9+x} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$$

$$9) \sqrt{52-3\sqrt{5x+6}} = 2\sqrt{10}$$

$$10) \sqrt{37-7\sqrt{5x+4}} = 4$$

$$11) \sqrt{x+2} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x-18} - \sqrt{x-25}$$

$$12) \sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 0$$

$$13) 17 - 4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}} = 1$$

$$14) \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 0$$

$$15) \sqrt{x+5+\sqrt{9x^2-4x+2}} = 2$$

$$16) \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-8} = \frac{15}{\sqrt{x+3}}$$

$$17) \sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = \frac{10}{\sqrt{x+2}}$$

$$18) \sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$$

$$19) \frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$$

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Wurzelgleichungen!

$$1) \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 0$$

$$2) \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-4} - \sqrt{2x-6} - \sqrt{x-1} = 0$$

$$3) \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \frac{b}{\sqrt{b-x}}; (a+b > 0)$$

$$4) \sqrt{x+5} + 1 = \sqrt{2x+3}$$

$$5) \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x-1}} = \sqrt[3]{8x-11}$$

$$6) \sqrt{7x-12} + \sqrt{13-3x} = 5$$

$$7) \sqrt{x+5-\sqrt{9x^2-4x+2}} = 2$$

d) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

$$1) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{u}{v} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{v^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{u^2}}}$$

$$3) \frac{4 \cdot 2^5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-2}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot 16}$$

$$4) \left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^{-3}$$

$$5) (\sqrt[n]{a})^{2n-4} \cdot (\sqrt[n]{a})^{3n+2} \cdot (\sqrt[n]{a})^{2-4n}$$

$$6) \sqrt[4]{\sqrt[3]{m^2n^6}}$$

$$7) \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-8} = \frac{15}{\sqrt{x+3}}$$

$$8) \sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = \frac{10}{\sqrt{x+2}}$$

$$9) \sqrt[3]{x^3 + 6x + 20} - x = 2$$

$$10) \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5} - \sqrt{x-2} = \sqrt{3x}$$

### Kapitel 1.3.5, Exponentialgleichungen

a) Lösen Sie die folgenden Aufgaben!

$$1) 9^{\frac{3.5x-2.5}{10x-3}} = 3^{\frac{5x-3}{6x+1}}$$

$$2) \lg(3^{\sqrt{x+1}} + 1) - 1 = \lg(3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 5) - \lg 4$$

$$3) 7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$$

$$4) 2^{(3^x)} = 3^{(2^x)}$$

$$5) a^{n-x} = 2b^x; \text{ mit } a, b > 0; a \neq \frac{1}{b}$$

$$6) a^{mn-p} = b^{nx-q}; a > 0; b > 0; m \neq 0; n \neq 0$$

$$7) 3^{2x+1} - 5^{x-1} = 3^{2x+3} - 5^{x+1}$$

$$8) \lg(2^{\sqrt{x-1}} - 6) - 1 = -\lg \frac{5}{2} + \lg(2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{-1} - 3)$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Aufgaben!

$$1) 4^{\frac{2x-1}{x-2}} = 2^{\frac{2x-6}{x+1}}$$

$$2) \left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3x+5}$$

$$3) 2^{4x+3} = 4 \cdot 3^x$$

$$4) 4^{2x+3} - 3^x = 2^{4x+3} + 3^{x+3}$$

$$5) 10^{(4^x)} = 12^{(5^x)}$$

$$6) m^{qx} n^{rx-s} - m^{t-qx} = 0; \text{ mit } m, n > 0; r, q \neq 0$$

$$7) \lg(2^{4x} \cdot 10) + \lg 8 + 1 = \lg(4 \cdot 3^x) + 2$$

$$8) \lg(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} + 1) - 1 = \lg(2^{\sqrt{x-2}} - 2) - 2 \lg 2$$

c) Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen nach der Variablen  $x$ !

1)  $9^x = 27$

2)  $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

3)  $\sqrt[3]{x-1}\sqrt{3^{10x+5}} - 3^{x-9}\sqrt{27^{3x-7}} = 0$

4)  $9^{\frac{3,5x-2,5}{10x-3}} = 3^{\frac{5x-3}{6x+1}}$

5)  $2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0$

6)  $\lg(3^{\sqrt{x+1}} + 1) - 1 = \lg(3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 5) - \lg 4$

7)  $2^{3^x} = 3^{2^x}$

8)  $7 \cdot \sqrt[3]{22} - 15 \cdot \sqrt[3]{25} = 0$

9)  $\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1}$

10)  $e^{2x} + e^x = 2$

11)  $5^{3x-5} = (5^2)^{x+3}$

12)  $3^{\frac{2x-1}{3}} = 2^{\frac{3x+2}{4}}$

13)  $e^{x-1} - e^{2-x} = 2$

14)  $25^x = \frac{1}{5}$

15)  $a^{10} = a^{4x+1}$

16)  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$

17)  $a^{(x-3)x-4} = a^{(x-2)x-7}$

18)  $a^{(x-2)(x+3)} = 1$

19)  $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$

20)  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$

### Kapitel 1.3.6, Logarithmische Gleichungen

a) Lösen Sie die folgenden logarithmischen Gleichungen nach der Variablen  $x$ !

1)  $\log_5 x + \log_5(2x-1) = \log_5(x+4)$

2)  $\frac{\ln(x-1)+2}{\ln(x-1)-1} = 4$

3)  $\ln x - \ln a = b$

4)  $\lg(x+2) = 3$

5)  $\lg(2x+1) - \lg x - 3 = 0$

6)  $\log_9(x^2 + 5x - 3) = \log_3(x^2 + 5)$

7)  $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$

8)  $\log_5(x^2 - 6x + 6) = 0$

9)  $\ln(2 - 4x^2) = \frac{1}{2}$

10)  $\log_x(x+4) = 2$

11)  $\log_5 \log_2(ax) = 1$

12)  $\log_5 \log_3 \log_3 x = 0$

13)  $\log_x \sqrt{2} + \log_x 4 = \frac{1}{2}$

14)  $\log_x 9 = 1 + \log_x 3$

15)  $\frac{1}{2}(\lg x)^2 = 2 - \frac{3}{2}\lg x$

16)  $\lg 16x^2 - \lg 8x^2 = 2 \cdot \lg 4x^2 - \lg 8 - \lg x^2$

17)  $3\sqrt{\lg x} - \lg x = 2$

18)  $\log_x 8 + \log_x 2 = 2$

19)  $\lg x^5 = \lg x^2 + 6$

20)  $2 \cdot \lg x = 3 \cdot \lg 4$

21)  $\lg x^2 = 3 \cdot \lg 4$

22)  $\ln x = 2 \cdot \ln u + 3 \cdot \ln v$

23)  $\ln x - \ln a + \ln b = 0$

24) Bestimmen Sie die Variablen A, B, C, D und E jeweils als Funktion der anderen fünf Variablen!

$$A \cdot B^{C \cdot \lg D + E} = F$$

25)  $3 \cdot \lg x = \lg 27$

26)  $\ln x^2 = 2 \cdot \ln 2$

27)  $3 \cdot \ln x = 5 + \frac{12}{\ln x}$

28)  $\log_x 125 = 3$

29)  $\log_7 x = 2$

30)  $\log_{\frac{1}{5}} x = -3$

31)  $\ln(\ln x) = 2$

32)  $\lg x^2 = 4$

33)  $\lg 2x = 4$

34)  $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$

35)  $\ln\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 3$

36)  $\log_a \left\{ 1 + \log_b \left[ 1 + \log_c \left( 1 + \log_p x \right) \right] \right\} = 0$

37)  $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1$

38)  $\log_x 5\sqrt{5} - \frac{5}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$

39)  $5^{\log x} + 5^{\log x-1} = 3^{\log x+1} + 3^{\log x-1}$

40)  $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$

41)  $3\sqrt{\lg x} + 2 \cdot \lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2$

42)  $\lg 9^{-1} + x \cdot \lg \sqrt[3]{3^{5x-7}} = 0$

43)  $\log_5 120 + x - 3 - 2 \cdot \lg_5(1 - 5^{x-3}) = -\log_5(0,2 - 5^{x-4})$

44)  $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

45)  $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$

46)  $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

47)  $2^{2x} - 3^{x-0,5} + 2^{2x-1} = 3^{x+0,5}$

b) Formen Sie unter Verwendung der Logarithmusgesetze um!

$$1) \ln \frac{e^3(a+b)}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$$

$$2) \lg \sqrt[3]{\frac{100(a+b)}{c^2}}$$

$$3) \ln \frac{\sqrt[5]{a} \cdot e^3}{\sqrt[4]{c^7} \cdot \sqrt[3]{e^2}}$$

$$4) \lg \sqrt[10]{a^2(a+b)^5}$$

$$5) \frac{1}{2} \lg \sqrt[3]{b} + 2 \lg a - 3 \lg \sqrt{a}$$

$$6) \frac{1}{2} \lg c + 2 \lg(a+b) - \lg(a^2 - b^2) - 4 \lg a$$

$$7) 2 \lg(a^2 - b^2) - \lg(a-b)^2 + \lg 2$$

$$8) \ln \left( e^4 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2}} \right)$$

c) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden logarithmischen Gleichungen!

$$1) \log_2 8 + \log_{27} 3 + \log_4 \log_2 16$$

$$2) \log_2 8 + \log_5 \sqrt{125}$$

$$3) \log_2 64 + \log_{27} 9 - \log_4 8$$

$$4) \log_4 \log_3 \log_2 8$$

$$5) \log_{125} 5 + \log_3 \log_2 512$$

$$6) \ln(x^2 + 4x + 2) - \ln(x - 12) = 0$$

$$7) \frac{1}{2} \lg(2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} = 1$$

$$8) \lg(x + 2) = 3$$

$$9) \lg(2x + 1) - \lg x - 3 = 0$$

$$10) \ln x - \ln a = b$$

$$11) \log_5 \log_2(ax) = 1$$

$$12) \log_5 \log_3 \log_3 x = 0$$

$$13) \log_x \sqrt{2} + \log_x 4 = \frac{1}{2}$$

$$14) \log_x 9 = 1 + \log_x 3$$

$$15) \frac{1}{2} (\lg x)^2 = 2 - \frac{3}{2} \lg x$$

$$16) 3\sqrt{\lg x} - \lg x = 2$$

$$17) \lg 16x^2 - \lg 8x^2 = 2 \lg 4x^2 - \lg x^2 - \lg 8$$

$$18) \lg(2x + 3) = \lg(x + 1) + 1$$

$$19) \log_4 \log_3 \log_2 x = 0$$

$$20) \log_x 8 + \log_x 2 = 2$$

### Kapitel 1.3.7, Trigonometrische (Goniometrische) Gleichungen

a) Lösen Sie die folgenden trigonometrischen Gleichungen nach der Variablen  $x$ !

1)  $\sin x + \cos x = 1$

2)  $\cos x + \cos 2x = 0$

3)  $4 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos x = 4,5$

4)  $\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 1$

5)  $\tan 2x + \tan x = \frac{2}{3}$

6)  $5 \cdot \sin x + 3 \cdot \tan x = 0$

7)  $2 \cdot \sin^2 x + 4 \cdot \cos^2 x = 3$

8)  $\sin^2 x + 2,14 \cdot \cos^2 x = 4,32$

9)  $\tan^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$

10)  $\cot \frac{x}{2} - \cos x = 1$

11)  $3 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x = 6$

12)  $5 \cdot \sin^2 x \cdot \tan x - \sin 2x = 0$

13)  $2^{\sin^2 x} = 1 + 2^{\cos^2 x}$

14)  $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

Beweisen Sie folgende Gleichungen!

15)  $\frac{\cos a - \cos 3a}{\sin 3a - \sin a} = \tan 2a$

16)  $\sin 7a \cdot \tan 3,5a + \cos 7a = 1$

17)  $\cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Funktionen!

1)  $3 \sin x = 2 \cos^2 x$

mit  $x \in P$

2)  $5 \sin^2 x \tan x - \sin 2x = 0$

mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$

3)  $\cos\left(x + \frac{p}{12}\right) \sin\left(x - \frac{p}{12}\right) = 0,183$

mit  $0 \leq x < 2p$

4)  $\cot x = 2 \sin x$

mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$

5)  $\cos x - 2 \sin x = 1$

mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$

6)  $2 \sin 2x + 5 \cos x + 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 2$

mit  $x \in P$

7)  $2 \sin^2 x \tan x + \sin 2x + 2 \cos 2x - 2 = 0$

mit  $x \in P$



c) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

1)  $\frac{\sin 2x(1 - 2 \sin^2 x)}{\sin x \cos 2x}$

2)  $\cos(60^\circ + \mathbf{a}) + \sin(30^\circ + \mathbf{a})$

3)  $\frac{\sin 45^\circ + \cos(2\mathbf{a} - 45^\circ)}{\cos 45^\circ - \sin(2\mathbf{a} - 45^\circ)}$

4)  $\sin \mathbf{a} + \sin(\mathbf{a} + 120^\circ) + \sin(\mathbf{a} + 240^\circ)$

5)  $\frac{\cos 45^\circ + \sin(2\mathbf{a} + 45^\circ)}{\sin 45^\circ - \cos(2\mathbf{a} + 45^\circ)}$

d) Geben Sie die Lösungsmengen an!

1)  $2 \cos\left(x + \frac{\mathbf{p}}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) = 1,5$  mit  $x \in P$

2)  $\sin\left(2x + \frac{\mathbf{p}}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{\mathbf{p}}{4}\right) = \frac{1}{2}$  mit  $x \in P$

3)  $\sin\left(\frac{x}{2} + 60^\circ\right) - \frac{1}{2} = \sin \frac{x}{2}$  mit  $0^\circ \leq x < 720^\circ$

4)  $2 \cos 2x + 7 \cos x = 0$  mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$

5)  $2 \sin x \tan x + 6 \cos x + 9 = 0$  mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$

6)  $\sin 3x = \sqrt{5} \sin 2x$  mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$

7)  $\sin\left(x - \frac{\mathbf{p}}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\mathbf{p}}{3}\right) = \frac{1}{2}$  mit  $0^\circ \leq x < 360^\circ$