# Übungsaufgaben zu Kapitel 2, Vektoralgebra, Vektorrechnung

1) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , wenn

a) $u = 2, v = 3, \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$ b) $u = 1, v = 5, \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$
c) $u = 2, v = 5, \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$ d) $u = 2, v = 5, \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$
e) $u = 2, v = 5, \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$ !

2) Berechnen Sie den Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v})$, wenn

a) $u = \sqrt{2}, v = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ b) $u = 2, v = 4, \vec{u} \cdot \vec{v} = -4$
c) $u = 2, v = 3, \vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ d) $u = 2, v = 3, \vec{u} \cdot \vec{v} = -6$
e) $u = 2, v = 3, \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ !

3) Berechnen Sie folgende Ausdrücke, wenn die Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}$ orthogonal sind und

$\vec{u} = 5\vec{i} - \vec{j}; \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}; \vec{w} = 3\vec{j}$ !

a) $(\vec{u})^2$ b) $(\vec{v})^2$ c) $(\vec{w})^2$
d) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ f) $\vec{u} \cdot \vec{w}$
g) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ h) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

4) Berechnen Sie den Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$, wenn $|\vec{u}| = |\vec{v}| \neq 0$ und die Vektoren $(2\vec{u} + \vec{v})$ und $(4\vec{u} - 5\vec{v})$ orthogonal sind !

5) Führen Sie die Terme zur elementaren Form !

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{u}$ b) $\vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v})$
c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ d) $(2\vec{u} + \vec{v}) \times (3\vec{u} - \vec{v})$
e) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v})$

6) Berechnen Sie, wenn $\vec{u} \perp \vec{v}$ und $u = v = 1$:

a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
c) $\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ d) $|\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{u})|$

7) Berechnen Sie, wenn $u = \sqrt{3}, v = 2$ und $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 150°$:

a) $(\vec{u} + \vec{v})^2$ b) $(\vec{u} - \vec{v})^2$
c) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$ d) $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} - 4\vec{v})$

8) Berechnen Sie $|\vec{u} \times \vec{v}|$ !

a) $u = 3, v = 8, \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 30°$
b) $u = \sqrt{3}, v = 2, \vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9) Beweisen Sie !

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

10) Berechnen Sie, für welche Parameter *m* die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} m^2+1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ m \end{pmatrix}$ a) parallel sind! b) orthogonal sind!

11) Berechnen Sie, für welche Parameter *m* die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} m^2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$ orthogonal (⊥) sind !

12) Bilden Sie, für die Punkte A = (1,1,3); B = (0,-1,4); C = (3,-5,0), die Vektoren

$\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}\ und\ \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}$ !

13) Gegeben sei der Punkt A = (1,-2,3).

Bestimmen Sie den Punkt B = ($x_2$,$y_2$,$z_2$),wenn der Vektor

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist!

14) Gegeben sei der Punkt B = (3,7,-2).

Bestimmen Sie den Punkt A = ($x_1$,$y_1$,$z_1$),wenn der Vektor

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist!

15) Gegeben sind, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$a_1$) $\vec{a} + \vec{b}$ $a_2$) $\vec{a} + \vec{c}$ $a_3$) $\vec{b} - \vec{d}$

$a_4$) $2\vec{a}$ $a_5$) $-3\vec{b}$ $a_6$) $3\vec{c} + 4\vec{d}$

$a_7$) $2\vec{c} + \vec{d} - \vec{a}$

15) $b_1)$ $\vec{a}\cdot\vec{a}$ $b_2)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $b_3)$ $\vec{a}\cdot\vec{c}$
$b_4)$ $\vec{a}\cdot\vec{d}$ $b_5)$ $\vec{b}\cdot\vec{b}$ $b_6)$ $\vec{b}\cdot\vec{c}$
$b_7)$ $\vec{b}\cdot\vec{d}$ $b_8)$ $\vec{c}\cdot\vec{c}$ $b_9)$ $\vec{c}\cdot\vec{d}$ $b_{10})$ $\vec{d}\cdot\vec{d}$

$c_1)$ $|\vec{a}|$ $c_2)$ $|\vec{b}|$ $c_3)$ $|\vec{c}|$ $c_4)$ $|\vec{d}|$

Richtungswinkel mit den Achsen x, y, z:
$d_1)$ $\cos(\vec{a},x)$ $d_2)$ $\cos(\vec{b},x)$ $d_3)$ $\cos(\vec{c},x)$
$d_4)$ $\cos(\vec{d},x)$ $d_5)$ $\cos(\vec{a},y)$ $d_6)$ $\cos(\vec{b},y)$
$d_7)$ $\cos(\vec{c},y)$ $d_8)$ $\cos(\vec{d},y)$ $d_9)$ $\cos(\vec{a},z)$
$d_{10})$ $\cos(\vec{b},z)$ $d_{11})$ $\cos(\vec{c},z)$ $d_{12})$ $\cos(\vec{d},z)$

$e_1)$ $\cos(\vec{a},\vec{b})$ $e_2)$ $\cos(\vec{a},\vec{c})$ $e_3)$ $\cos(\vec{a},\vec{d})$
$e_4)$ $\cos(\vec{b},\vec{c})$ $e_5)$ $\cos(\vec{b},\vec{d})$ $e_6)$ $\cos(\vec{c},\vec{d})$

$f_1)$ $\vec{a}\times\vec{b}$ $f_2)$ $\vec{a}\times\vec{c}$ $f_3)$ $\vec{a}\times\vec{d}$
$f_4)$ $\vec{b}\times\vec{c}$ $f_5)$ $\vec{b}\times\vec{d}$ $f_6)$ $\vec{c}\times\vec{d}$

16) Gegeben sind die Punkte A = (0,-1,3); B = (6,5,-2); C = (1,-2,3).

Zeigen Sie, daß $\overline{AB}\perp\overline{AC}$ !

17) Zeigen Sie, daß ABCD ein Rechteck ist!

A = (1,2,1); B = (9,6,2); C = (10,5,-2); D = (2,1,-3)

18) Berechnen Sie den Mittelpunkt $S$ des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ und ermitteln Sie den Betrag des

Vektors $\overrightarrow{0S}$ ! $P_1 = (1,1,4)$; $P_2 = (5,3,2)$

19) Finden Sie auf der x-Achse den Punkt X, der von den Punkten

$P_1 = (5,1,4)$ und $P_2 = (-4,5,3)$ gleich weit entfernt ist !

20) Finden Sie einen Punkt A auf der x,0,z- Ebene (Fläche), der von allen drei Punkten

$P_1 = (2,3,0)$; $P_2 = (-1,4,-4)$ und $P_3 = (6,0,-1)$ den selben Abstand hat !

21) Finden Sie einen Punkt A auf der 0,y,z- Ebene (Fläche), der von allen drei Punkten

$P_1 = (0,1,-3)$; $P_2 = (-2,-2,0)$ und $P_3 = (4,0,5)$ den selben Abstand hat !

22) Stellen Sie fest, ob die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ parallel sind!

Wenn ja, dann stellen Sie den Zusammenhang dar!

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = 2i - 3j + 1k$ ; $\vec{v} = -4i + 6j - 2k$

c) $\vec{u} = 1i + 3j - 5k$ ; $\vec{v} = -\frac{1}{3}i + 1j - \frac{5}{3}k$

23) Prüfen Sie, ob die angegebenen 3 Vektoren komplanar sind !

a) $\vec{u} = 1i + 3j + 1k$ ; $\vec{v} = 0i + 1j - 2k$ ; $\vec{w} = 2i + 9j - 4k$

b) $\vec{u} = 2i + 1j + 1k$ ; $\vec{v} = 1i + 2j + 4k$ ; $\vec{w} = 4i - 1j - 5k$

24) Berechnen Sie folgenden Ausdruck:

$\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 1$, wenn folgendes gilt: $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$ , $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ , $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$;

$|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, Winkel $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{p}{2}$

25) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{p} = 6\vec{m} + 4\vec{n}$ und $\vec{q} = 2\vec{m} + 10\vec{n}$ , wenn gilt:

$|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ und $\vec{m} \perp \vec{n}$ !

26) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{p}$ und $\vec{q}$ , wenn $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ und $\vec{b} = -4\vec{p} + 5\vec{q}$ senkrecht sind und $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ !

27) Für welchen Parameter $l$ sind die Vektoren $\vec{a} = 3\vec{p} + l\vec{q}$ und $\vec{b} = -\vec{p} + 2\vec{q}$ senkrecht, wenn gilt: $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 3$ und der Winkel $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2}{3}p$ ?

28) Finden Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ , wenn der Vektor $\vec{a} + 3\vec{b}$ zum Vektor $7\vec{a} - 5\vec{b}$ senkrecht ist und der Vektor $\vec{a} - 4\vec{b}$ senkrecht zum Vektor $7\vec{a} - 2\vec{b}$ ist !

29) Finden Sie den Projektionsvektor, $\vec{c} = K \cdot \vec{b}$ mit der Konstanten $K$, vom Vektor $\vec{a}$ in die Richtung vom Vektor $\vec{b}$ , wenn gilt: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ und der Winkel $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{p}{3}$ !

30) Finden Sie den Projektionsvektor vom Vektor $\vec{a} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$ in die Richtung vom Vektor $\vec{b} = -2\vec{m}$, wenn gilt: $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ (Einheitsvektoren) und $\vec{m} \perp \vec{n}$ !

31) Finden Sie den Projektionsvektor vom Vektor $\vec{a} = -\vec{m} + 2\vec{n}$ in die Richtung vom Vektor $\vec{b} = 6\vec{m} - 2\vec{n}$ , wenn gilt: $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ (Einheitsvektoren) und $\vec{m} \perp \vec{n}$ !

32) Finden Sie den Projektionsvektor vom Vektor $\vec{a} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$ in die Richtung vom Vektor $\vec{b} = -\vec{m} + \vec{n}$ , wenn gilt: $|\vec{m}| = 2$ , $|\vec{n}| = 1$ und der Winkel $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{p}{3}$ !

33) Beweisen Sie, daß die Vektoren $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$ und $\vec{c}$ senkrecht zueinander sind !

34) Beweisen Sie, daß die Vektoren $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\vec{a}^2}$ und $\vec{a}$ senkrecht zueinander sind !

35) Für ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge *a* berechne man $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ !