

# Übungsaufgaben zu Kapitel 4.2, Die Technik des Differenzierens

## Kapitel 4.2.2, Differentiationsregeln

a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

1)  $y = 10x^3$

2)  $y = 4x^7 + 3 \sin x$

3)  $y = (4x^3 - 3x)(2e^x - \sin x)$

4)  $y = \frac{x^3 - 4x + 5}{2x^2 - 4x + 1}$

5)  $y = \frac{\sin x}{x^2}$

6)  $y = x^2 \cdot \cos x$

7)  $y = 3 \cdot \sin(5x)$

8)  $y = (3x - 4)^8$

9)  $y = e^{4x^2 - 3x + 2}$

10)  $y = \sqrt{e^{\sin^2(wx-j)}}$

11)  $y = 10 \cdot \ln(1 + x^2)$

12)  $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

b) Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und führen Sie das Ergebnis zur einfachsten Form!

1)  $y = \sin(2x)$

2)  $y = \sin(x^2 + 3x)$

3)  $y = \cos((x^2 - 2)^2)$

4)  $y = \cos^2 x$

5)  $y = \cos^2(x^2 + 3x)$

6)  $y = 4 \sin^5(e^x)$

7)  $y = 3 \cos^4(e^x + 2x^2)$

8)  $y = \frac{e^{\sin x}}{x^2}$

9)  $y = \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$

10)  $y = x\sqrt{x^2 - 25} - 25 \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 - 25})$

11)  $y = 10^{\cos x}$

12)  $y = \cos(10^x)$

13)  $y = x^{\cos 10}$

14)  $y = 2^{\ln x}$

15)  $y = \ln(2^x)$

16)  $y = (\ln x)^2$

17)  $y = x^{\cos x}$

c) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nach der unabhängigen Variablen  $x$ !

1)  $y = a^x x^a$

2)  $y = e^{x^2}$

3)  $y = \frac{x^a}{a^x}$

4)  $y = \frac{a^x}{x^a}$

5)  $y = (e^x)^2$

6)  $y = (e^x)^5$

7)  $y = (a^3 - b^2 x^5)^4$

8)  $y = e^{\ln x}$

9)  $y = \ln(2 - x^2)$

10)  $y = \sqrt{\tan x}$

11)  $y = \lg(x^2 + 1)$

12)  $y = \frac{x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$

13)  $y = \tan(p - 2x^2)$

14)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

15)  $y = \sin(e^x)$

16)  $y = e^{\sin x}$

17)  $y = \ln \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

18)  $y = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

19)  $y = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

20)  $y = \tan \sqrt{e^{2x+1}}$

21)  $y = \ln \sin(a^{2x} + 1)$

22)  $y = \frac{e^x 3^x}{1 + \ln 3}$

23)  $y = a^{\sqrt{x}}$

24)  $y = a^{-3x\sqrt{2x-5}}$

25)  $y = 2^x + x^2 + 2^a + x^a$

26)  $y = (a^b)^x$

27)  $y = (x^a)^b$

28)  $y = \ln \cos x$

29)  $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$

30)  $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

31)  $y = \ln \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

32)  $y = \sqrt{x^3 + \sqrt{x^3}}$

33)  $y = \tan \sqrt{e^{2x+1}}$

34)  $y = \sqrt{\ln \frac{\sin x}{x}}$

35)  $y = e^{\sqrt[3]{\sin(-2x)}}$

36)  $y = \frac{1}{\cos^3(2x^2 - 3)}$

37)  $y = \log_3|x^2 - 1|$

38)  $y = e^{\sqrt{x+1}}$

39)  $y = \sin 2^x$

40)  $y = \sin(\sin x)$

41)  $y = \cos^3(4x)$

d) Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

1)  $y = \sqrt[3]{x}$

2)  $y = \sqrt[5]{x^4}$

3)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad x > 0$

4)  $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

5)  $y = 2x^2 + 3x + 5$

6)  $y = 2x^3 - 5x + 4$

7)  $y = (2x + 1)(x^2 - 3)$

8)  $y = (x - 5)^2(2x - 1)$

9)  $y = \frac{3x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

10)  $y = \frac{(x-1)^3}{x}$

11)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

12)  $y = \frac{a}{x} - \sqrt{2}$

13)  $y = \frac{1-t}{1+t}$

14)  $y = \frac{2x-1}{x^2+x-2}$

15)  $y = (x-1)(2x+3)$

16)  $y = x \cdot \sin x$

17)  $y = (x-1) \tan x$

18)  $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

19)  $y = \frac{x^2+x-1}{x^3+1}$

20)  $y = \frac{x^4-x}{\sqrt{2}}$

21)  $y = \tan x - \cot x$

22)  $y = \frac{2x}{1-\cos x}$

23)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

24)  $y = x \cdot \cot x$

25)  $y = \sin x + \cos x$

26)  $y = x^2 \cdot \cos x$

27)  $y = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$

28)  $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

29)  $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$

30)  $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$

31)  $y = \sqrt{\sin x}$

32)  $y = \sqrt{1 - x^2}$

33)  $y = \sin \frac{1}{x}$

34)  $y = \sin \sqrt{x}$

35)  $y = (2x - 1)^5$

36)  $y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$

37)  $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$

38)  $y = \sqrt{\tan x + x^2} + \sqrt{\tan \frac{p}{4}}$

39)  $y = \sin^2 \frac{1-x}{1+x}$

40)  $y = \sqrt{\cot \left( x + \frac{1}{x} \right)}$

41)  $y = \cos^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

42)  $y = \cot(\mathbf{p} \cdot x) + \frac{\cos(\mathbf{p} \cdot x)}{2 \sin^3(\mathbf{p} \cdot x)}$

43)  $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$

44)  $y = \sqrt[3]{\sin(3x - 2)}$

45)  $y = \frac{\sin^2 x}{\cos^7 x} - \frac{2}{5 \cos^5 x}$

46)  $y = \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$

47)  $y = \sin^3 x^2$

48)  $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

49)  $y = \sqrt[3]{\frac{1 + \tan t}{1 - \tan t}}$

50)  $y = \cos^2 \sqrt{\frac{1}{x}}$

51)  $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

52)  $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})}$

### Kapitel 4.2.3, Die Differentiation impliziter Funktionen

Differenzieren Sie die folgenden impliziten Funktionen!

- |                                 |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|
| 1) $2y^3 + 6x^3 - 24x + 6y = 0$ | 2) $x^5 - y^2 = 0$            |
| 3) $xy - a = 0$                 | 4) $x \cdot \cos y = c$       |
| 5) $y^2 - x^3 + x^2 e^y = 0$    | 6) $\sin x + \sin y - xy = 0$ |
| 7) $(y - x)^3 + \cos^2 y = 0$   | 8) $(x^3 + y^2)^5 - 3x^2 = 0$ |
| 9) $y^3 + x \cdot \cos^2 y = 0$ | 10) $(\sin x)^{\ln x} = y^2$  |
| 11) $x^y - y^x = 0$             |                               |

### Kapitel 4.2.4, Differentiation durch Logarithmieren

Wie lauten die Ableitungen der folgenden Funktionen?

- |  |                            |
|--|----------------------------|
| 1) $y = e^{2x^2}$                        | 2) $y = x^x$               |
| 3) $y = (\sin 2x)^{\sqrt{\cos 3x}}$      | 4) $y = (\ln x)^x$         |
| 5) $y = 2x^{\sqrt{x}}$                   | 6) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ |
| 7) $y = x^{\sin x}$                      | 8) $y = (\sin x)^{\cos x}$ |
| 9) $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$    | 10) $y = x^{x^2}$          |
| 11) $y = x^{\frac{1}{x}}$                | 12) $y = x^{x^x}$          |
| 13) $y = (\sqrt[3]{x})^{x^2}$            | 14) $\sqrt[3]{x} = xy$     |
| 15) $y = x^{\sqrt{x}}$                   | 16) $y = (\sqrt{x})^x$     |
| 17) $y = \sqrt[3]{x}$                    | 18) $y = (\cos x)^x$       |
| 19) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ |                            |