

6 Komplexe Zahlen

6.3.1 Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

1) geg.: $z_1 = 2 - 2j$

$$z_2 = 6 \cdot (\cos(3.5) + j \cdot \sin(3.5))$$

$$z_3 = 4 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{5}{6} \cdot \pi\right)$$

- Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag dieser Zahlen.
- Die Zahlen sind als Zeiger in der GAUSS'schen Zahlenebene darzustellen.
- Bestimmen Sie die konjugiert komplexen Zahlen zu z_1 , z_2 und z_3 jeweils in der Darstellungsform, in der die ursprünglichen Zahlen gegeben sind.
- Geben Sie für jede Zahl die jeweils anderen Darstellungsformen an.

2) geg.:

$$z_1 = -5 + 12j$$

$$z_2 = -4$$

$$z_3 = -j$$

Die komplexen Zahlen sind in die goniometrische Form und in die Exponentialform umzuwandeln.

3) geg.: $z_1 = 5 \cdot (\cos(1.5) + j \cdot \sin(1.5))$

$$z_2 = -5 \cdot (\cos(1.5) + j \cdot \sin(1.5))$$

Die komplexen Zahlen sind in die arithmetische Form umzuwandeln.

4)

a) $z_1 = 1 - 4j$

$$z_2 = -2.5 + 1.5j$$

Berechnen Sie : $z_1 + 2 \cdot z_2$

b) $z_1 = 1 - 4j$

$$z_2 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \pi\right) \right)$$

Berechnen Sie : $3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2$

c) $z_1 = 2 + j$

$$z_2 = 5 - 2j$$

Berechnen Sie : $z_1 \cdot z_2$

d) $z_1 = 2 + j$

$$z_2 = 5 - 2j$$

Berechnen Sie : $\frac{z_2}{z_1}$

4)

$$e) \quad z_1 = 4 \cdot \exp(j \cdot 70^\circ) \quad z_2 = 2 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{3}{5} \cdot \pi\right)$$

Berechnen Sie : $z_1 \cdot z_2$

$$f) \quad z_1 = 4 \cdot \exp(j \cdot 70^\circ) \quad z_2 = 2 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{3}{5} \cdot \pi\right)$$

Berechnen Sie : $\frac{z_1}{z_2}$

$$g) \quad z_1 = 1 - \sqrt{3} \cdot j \quad z_2 = 2 \cdot (\cos(135^\circ) + j \cdot \sin(135^\circ))$$

Berechnen Sie : $z_1 \cdot z_2$

$$h) \quad z_1 = 1 - \sqrt{3} \cdot j \quad z_2 = 2 \cdot (\cos(135^\circ) + j \cdot \sin(135^\circ))$$

Berechnen Sie : $\frac{z_2}{z_1}$

$$i) \quad z_1 = 2 \cdot \exp(j \cdot 26^\circ) \quad z_2 = 3 \cdot \exp(j \cdot 112^\circ)$$

Berechnen Sie : $z_1 + z_2$

5) Gegeben sind die komplexen Zahlen:

$$z_1 = 1 - 2j$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_3 = 5 \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{5}{3} \cdot \pi\right)$$

Berechnen Sie :

$$a) \quad \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$$

$$b) \quad \overline{z_2 \cdot z_3}$$

$$c) \quad (z_1 + z_3) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_3})$$

$$d) \quad \frac{z_1^2}{z_3}$$

$$e) \quad \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$$

6.4 Potenzieren von komplexen Zahlen

1) Berechnen Sie :

a) $(2 + j)^3$

b) $\frac{1}{(1 - \sqrt{2} \cdot j)^2}$

c) $(2 \cdot (\cos(20^\circ) + j \cdot \sin(20^\circ)))^5$

d) $(2 \cdot (\cos(20^\circ) - j \cdot \sin(20^\circ)))^5$

e) $\left(\frac{1}{2} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{2} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi\right)\right)^{-2}$

6.5 Radizieren von komplexen Zahlen

1) Wie heißen alle Lösungen von z?

a) $z^3 = -27j$

b) $z^4 + 4 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot j = 0$

c) $z^5 + 1 = 0$

2) Berechnen Sie :

a) $z = \sqrt[6]{j}$

b) $z = \left(-\sqrt{3} + j\right)^{\frac{3}{2}}$

bzw. $z^{\frac{2}{3}} = -\sqrt{3} + j$

6.6 Logarithmieren von komplexen Zahlen

1) Man bestimme die Hauptwerte der natürlichen Logarithmen von :

a) $z = 5 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{\pi}{7}\right)$

b) $z = 3.5 \cdot \exp(j \cdot 136^\circ)$

c) $z = -3$

d) $z = 1$

e) $z = 2 + \sqrt{5} \cdot j$

f) $z = -j$

2) Welchen Wert besitzt z, wenn gegeben ist :

a) $\ln(z) = \ln(3) + j \cdot \pi$

b) $\ln(z) = \ln(3) + 3j$

c) $\ln(z) = -\ln(3) + 0.5j$

d) $\ln(z) = 1 + 3.75j$

e) $\ln(z) = 4$

f) $\ln(z) = j$

g) $\ln(z) = 0.247 + 2.53j$

h) $\ln(z) = -0.125 + 0.456j$