7 *Lineare Algebra*

7.1.1 *Transponierte einer Matrix*

Transponieren Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

7.1.2 *Quadratische Matritzen*

Welche der nachstehenden Matrizen sind symmetrisch, welche schiefsymmetrisch?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -1 \\ -b & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

7.1.4 *Rechenoperationen von Matritzen*

1) Berechnen Sie mit den (2, 3)-Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

die folgenden Ausdrücke:

a) $3 \cdot A^T - 4 \cdot (B + 2 \cdot C)^T$

b) $2 \cdot (A + B) - 3 \cdot \left(A^T - B^T\right)^T + 5 \cdot (C - 2 \cdot A)$

2) Führen Sie mit den Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die folgenden Rechenoperationen durch.

a) $A^T - B - 3 \cdot C^T$

b) $A - 2 \cdot C + B$

3) Berechnen Sie die Matrizenprodukte

$$A \cdot A = A^2 \qquad A \cdot B \qquad B \cdot A \qquad \text{und} \qquad B \cdot B = B^2$$

(soweit diese überhaupt existieren) für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, daß i. a. $A \cdot B \neq B \cdot A$ ist.

4) Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie (falls möglich):

a) $A \cdot (B + C)^T$

b) $(A \cdot B)^T$

7.2 *Determinanten*

1) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden 2-reihigen Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ x & 2 \cdot x \end{pmatrix}$

2) Welchen Wert besitzen die 3-reihigen Determinanten?

a) $\left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right|$, b) $\left| \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right|$, c) $\left| \begin{pmatrix} 3 & 4 & -10 \\ -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \right|$

(Berechnung nach der Regel von Sarrus)

3) Für welche reellen Parameter λ verschwinden die Determinanten?

a) $\left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \right|$ b) $\left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right|$

7.2.2 *Determinanten höherer Ordnung*

1) Berechnen Sie die 4-reihige Determinante

$$\det A = \left| \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -3 \\ 9 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \right|$$

durch Entwicklung a) nach den Elementen der 2. Zeile,
b) nach den Elementen der 3. Spalte.

2) Zeigen Sie, daß die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

komplanar sind, d.h. in einer Ebene liegen.

Hinweis: Das Spatprodukt $[\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ ]$ muß verschwinden!