8 Unendliche Reihen, Potenzreihen, Taylor-Reihen, Fourier-Reihen

8.1.1 *Grundlegende Definitionen und Eigenschaften unendlicher Reihen*

1) Bilden Sie die Teilsummen S_n der ersten n Glieder

a) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ...$

b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ...$

c) $\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + ...$

d) $\frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + ...$

e) $\frac{4}{2\cdot 6} + \frac{4}{3\cdot 7} + \frac{4}{4\cdot 8} + \frac{4}{5\cdot 9} + ...$

f) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 6} + ...$

2) Berechne den Summenwert der geometrischen Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 0.3^{n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

8.1.3.1 *Quotientenkriterium*

1) Ermitteln Sie das allgemeine Bildungsgesetz, welchem die folgenden Reihen unterliegen.
Prüfen Sie die Konvergenz (Quotientenkriterium).

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ...$

b) $1.1 + 1.01 + 1.001 + 1.0001 + ...$

c) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + ...$

d) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{36} + \frac{1}{97} + ...$

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$

f) $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + ...$

g) $1 + \frac{4}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{10}{4!} + \frac{13}{5!} + \frac{16}{6!} + ...$

h) $\frac{5}{12} + \frac{25}{48} + \frac{125}{108} + \frac{625}{192} + ...$

i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+.....$

j) $\frac{3}{7}+\frac{8}{12}+\frac{13}{17}+\frac{18}{22}+.....$

k) $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{4}+\frac{3!}{27}+\frac{4!}{256}+\frac{5!}{3125}+.....$

l) $\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{8}{4}+\frac{16}{5}+\frac{32}{6}+\frac{64}{7}+.....$

2) Welchem allgemeinem Bildungsgesetz unterliegen die folgenden Reihen?
Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

a) $1+\frac{10}{1!}+\frac{100}{2!}+\frac{1000}{3!}+.....$

b) $\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+.....$

c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+.....$

d) $\frac{\ln(2)}{1!}+\frac{\ln(2)^2}{2!}+\frac{\ln(2)^3}{3!}+.....$

e) $\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{10001}+......$

f) $\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}+.....$

g) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+.....$

h) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+.....$

i) $\frac{2^1}{1}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}-\frac{2^6}{6}+-.....$

j) $\frac{3^2}{2!}+\frac{3^4}{4!}+\frac{3^6}{6!}+\frac{3^8}{8!}+.....$

k) $\frac{1}{e}+8\cdot e^2+\frac{27}{e^3}+64\cdot e^4+\frac{125}{e^5}+.....$

8.1.3.2 *LEIBNIZsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen*

1) Prüfe mit dem Leibniz-Kriterium, ob die folgenden alternierenden Reihen konvergent sind.

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....$

b) $1-\frac{5}{6}+\frac{7}{9}-\frac{9}{12}+\frac{11}{15}-.....$

c) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-.....$

d) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-.....$

e) $\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+-.....$

f) $-\frac{2}{4}+\frac{5}{8}-\frac{8}{12}+\frac{11}{16}-\frac{14}{20}+\frac{17}{24}-.....$

g) $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^5}+-.....$

h) $-1-1+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}-3+\frac{1}{4}+4-.....$

2) Welche alternierenden Reihen konvergieren, welche divergieren?
Verwende das Konvergenzkriterium von Leibniz.

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + - .....$ b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - .....$

c) $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - .....$ d) $\frac{1}{5^1} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{15^5} - \frac{1}{20^7} + - .....$

e) $\frac{-2}{1} + \frac{4}{4} - \frac{8}{9} + \frac{16}{16} - \frac{32}{25} + \frac{64}{36} - ......$

8.2 *Potenzreihen*

1) Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

a) $\frac{1}{2}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot x^2 + \frac{3}{4}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^4 + ...$ b) $x + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot x^3 + ...$

c) $1 + \frac{2^1}{2}\cdot x + \frac{2^2}{3}\cdot x^2 + \frac{2^3}{4}\cdot x^3 + ...$ d) $x + 2^2\cdot x^2 + 3^3\cdot x^3 + 4^4\cdot x^4 + ...$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}\cdot x^n$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}\cdot x^n$

g) $1 + \frac{3}{1!}\cdot x + \frac{3\cdot 5}{2!}\cdot x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}\cdot x^3 + ..$ h) $1 + x + 2\cdot x^2 + 5\cdot x^3 + 12\cdot x^4 + 27\cdot x^5 + ...$

i) $-1 + x + 3\cdot x^2 + 5\cdot x^3 + 7\cdot x^4 + ...$ j) $1 + \frac{1}{2\cdot x} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8\cdot x^3} + \frac{x^4}{16} + ...$

2) Bestimme den Konvergenzradius.

a) $P(x) = x + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^3 + 4\cdot x^4 + ..$ b) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot \frac{x^n}{n}$

c) $P(x) = \frac{x^1}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + ...$ d) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

e) $P(x) = 1 + x + 9\cdot x^2 + 25\cdot x^3 + ...$ f) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + n!}$

g) $P(x) = \frac{1}{x} + 1^1 + 3^2\cdot x + 5^3\cdot x^2 + 7^4\cdot x^3 + ...$

h) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$

i) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$

j) $P(x) = 1 + \frac{\pi}{x} + \frac{x^2}{2\cdot\pi} + \frac{3\cdot\pi}{x^3} + ...$

8.3.1 *Mac LAURINsche Reihe*

Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Mac LAURINsche Reihe

a) $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x + e^{-x}\right)$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi\cdot x}{4}\right)$

h) $f(x) = 2^x$

i) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

8.3.2 **TAYLOR*sche Reihe***

Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine TAYLORsche Reihe um einen geeigneten Punkt x_0

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \ln(x-1)$

e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$

f) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$

8.3.4 *Integration durch Potenzreihenentwicklung*

Man bestimme das Integral durch Potenzreihenentwicklung.

a) $I = \int \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ b) $I = \int x^{x^3}\, dx$ c) $I = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx$d) $I = \int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$