9 Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

9.2 Partielle Differentiation

1) Bilde die partiellen Ableitungen erster Ordnung von :

a) $z(x,y) = x^2 \cdot y^3 - 4 \cdot x \cdot y^2 - 6 \cdot x + 5 \cdot y - 1$

b) $z(x,y) = \operatorname{asin}\left(\frac{x}{y}\right)$

c) $z(x,y) = \sqrt{x^y}$

d) $z(x,y) = \tan\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right)^2$

2) Gesucht sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach der in den folgenden Funktionen vorkommenden unabhängigen Variablen.

a) $f(x,y,z) = x^2 \cdot \sin(y) + y^2 \cdot \cos(x) + z^2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(y)$ $\quad f_x, f_y, f_z$

b) $f(t,x,y) = e^t \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right)$ $\quad f_t, f_x, f_y$

c) $f(t,x,z) = t \cdot e^{x \cdot z}$ $\quad f_t, f_x, f_z$

d) $f(t,x) = \ln\left(x^2 + t\right)$ $\quad f_t, f_x$

e) $f(x,y) = \sqrt{2 \cdot x^2 + y}$ $\quad f_x, f_y$

f) $u(x,y) = x \cdot e^{x \cdot y}$ $\quad u_x, u_y$

g) $u(x,y,z) = 2 \cdot x \cdot y + \sin(y) + z^2$ $\quad u_x, u_y, u_z$

h) $f(t,x) = \frac{x \cdot \cos(t) + 2 \cdot t \cdot \sin(x)}{x \cdot \sin(t) - 2 \cdot t \cdot \cos(x)}$ $\quad f_t, f_x$

i) $T(t,x,y) = t \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ $\quad T_t, T_x, T_y$

3) Bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$u(x,t) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$$

9.2.2 *Partielle Ableitungen höherer Ordnung*

1) Man bilde die Partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f_x \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = f_y \qquad \frac{\delta^2 \cdot f}{\delta x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\delta^2 \cdot f}{\delta y^2} = f_{yy} \qquad \frac{\delta^2 \cdot f}{\delta x \delta y} = f_{xy} \qquad \frac{\delta^2 \cdot f}{\delta y \delta x} = f_{yx}$$

a) $f(x,y) = C$ (Konstante)

b) $f(x,y) = x \cdot \sin(y)$

c) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

e) $f(x,y) = e^{\sin(x \cdot \cos(y))}$

2) Gesucht sind sämtliche partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, die sich für folgende Funktionen bilden lassen:

a) $f(x,y) = \sqrt{2 \cdot x^2 + y}$ $\qquad f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$

b) $T(t,x,y) = t \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ $\qquad T_{tt}, T_{xx}, T_{yy}, T_{xt} = T_{tx}, T_{yt} = T_{ty}, T_{xy} = T_{yx}$

c) $u(x,y,z) = x^2 + e^y \cdot \ln(z)$

d) $w(r,t) = \frac{t}{r^2}$

3) Berechne f_{xy} und f_{yx} für $f(x,y) = y \cdot \ln(\sin(x))$

9.2.3 *Das totale (vollständige) Differential*

1) Zu ermitteln sind die totalen Differentiale der folgenden Funktionen :

a) $f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right)$ $\qquad df=\frac{\delta f}{\delta x}\cdot dx+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot dy$

b) $u(t,x)=x\cdot\ln\left(\sqrt{t}\right)$ $\qquad du=u_t\cdot du+u_x\cdot dx$

c) $u(x,y,z)=2\cdot x\cdot y+\sin(y)+z^2$ $\qquad du=\frac{\delta u}{\delta x}\cdot dx+\frac{\delta u}{\delta y}\cdot dy+\frac{\delta u}{\delta z}\cdot dz$

d) $f(t,x,y,z)=t\cdot e^{x+y+z}$

e) $z(x,y)=x^3\cdot y+y^3\cdot x$ $\qquad$ f) $z(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

g) $z(x,y)=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$ $\qquad$ h) $z(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

2) Bestimme das totale Differential der folgenden Funktionen :

a) $z(x,y)=4\cdot x^3\cdot y-3\cdot x\cdot e^y$ $\qquad$ b) $z(x,t)=\frac{t^2+x}{2\cdot t-4\cdot x}$

c) $z(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x-y}$ $\qquad$ d) $u(x,y,z)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

9.2.3.1 *Partielle Ableitungen, wenn Funktionen in Parameterdarstellung vorliegen*

Bilde Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung

a) $u(x,y):=e^{x-2\cdot y}$ $\qquad x(t):=\sin(t)$ $\qquad y(t):=t^3$

b) $u(y,z):=z^2+y^2+z\cdot y$ $\qquad y(t):=e^t$ $\qquad z(t):=\sin(t)$

c) $z(x,y):=x^2\cdot y-y^2\cdot x$ $\qquad x(u,v):=u\cdot\cos(v)$ $\qquad y(u,v):=u\cdot\sin(v)$