10 *Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen*

10.1 *Doppelintegral unter Verwendung kartesischer Koordinaten*

Berechnen Sie folgende Mehrfachintegrale

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{e}\frac{x^2}{y}\,dy\,dx$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{1-x}\left(2\cdot x\cdot y-x^2-y^2\right)dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_{x=2}^{5}\int_{y=0}^{\sqrt{x}}(x+2\cdot x\cdot y)\,dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}x\cdot y\,dx\,dy$

e) $\displaystyle\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\sqrt{x\cdot y}\,dx\,dy$

f) $\displaystyle\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=1}^{2}x\cdot\sin(y)\,dx\,dy$

g) $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}e^{x+y}\,dx\,dy$

h) $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$

i) $\displaystyle\int_{y=1}^{2}\int_{x=3}^{4}\frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$

j) $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy$

k) $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\frac{y}{\sqrt{\left(1+x^2+y^2\right)^3}}\,dx\,dy$

l) $\displaystyle\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}x^2\cdot(y\cdot e)^{y\cdot x}\,dx\,dy$

m) $\displaystyle\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot y\cdot\cos\left[(x\cdot y)^2\right]dx\,dy$

n) $\displaystyle\int_{y=1}^{3}\int_{x=0}^{\sqrt{\ln(y)}}x\cdot y\cdot e^{x^2}\,dx\,dy$

o) $\displaystyle\int_{y=1}^{\frac{1}{2}\cdot e}\int_{x=0}^{2\cdot y}x\cdot(\ln(x)-1)\cdot y\,dx\,dy$

p) $\displaystyle\int_{x=1}^{e}\int_{y=0}^{\sqrt{x}}x\cdot y\cdot\ln(x)\,dy\,dx$

q) $$\int_{x=1}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} \frac{2\cdot y}{\left(x+y^2\right)^2}\, dy\, dx$$

r) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} 2\cdot x^2\cdot y\, dy\, dx$$

s) $$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot \sin(y)\, dy\, dx$$

t) $$\int_{x=a}^{b}\int_{y=0}^{1} y^x\, dy\, dx$$

u) $$\int_{x=0}^{2}\int_{y=1-\frac{x}{2}}^{2-x} x^2\cdot y\, dy\, dx$$

v) $$\int_{y=1}^{2}\int_{x=y}^{y^2} \sin\left(\frac{\pi\cdot x}{2\cdot y}\right) dx\, dy$$

w) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\frac{\pi}{4}} x\cdot \cos(2\cdot y)\, dy\, dx$$

x) $$\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} x\cdot y\, dy\, dx$$

y) $$\int_{y=0}^{1.5}\int_{x=1}^{5\cdot y} y\cdot e^x\, dx\, dy$$

10.2 *Doppelintegral in Polarkoordinaten*

Berechnen Sie folgende Mehrfachintegrale

a) $$\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{2} x\cdot y\cdot r\, dr\, d\phi \qquad x=r\cdot\cos(\phi) \quad y=r\cdot\sin(\phi)$$

b) $$\int_{\phi=0}^{2\cdot\pi}\int_{r=0}^{2} \left(4-r^2\right)\cdot r\, dr\, d\phi$$

c) $$\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=\cos(\phi)^2+\sin(\phi)}^{a} r\, dr\, d\phi$$

d) $$\int_{\phi=0}^{2\cdot\pi}\int_{r=0}^{a} r\, dr\, d\phi$$

e) $$\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=\phi}^{\cos(\phi)} r\, dr\, d\phi$$

f) $\displaystyle\int_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\cdot\pi}{2}}\int_{r=\sin(\phi)}^{\cos\left(\phi+\frac{\pi}{3}\right)} r\,dr\,d\phi$

g) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{2\cdot\pi}\int_{1}^{\ln(\phi)} e^{r-\phi}\cdot(\cos(\phi)-\sin(\phi))\,dr\,d\phi$

h) $\displaystyle\int_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{2\cdot\pi}\int_{r=0}^{\phi} (r\cdot\cos(2\cdot\phi)+\sin(\phi))\,dr\,d\phi$

i) $\displaystyle\int_{\phi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\cdot\pi}{4}}\int_{r=0}^{\sqrt{\cos(2\cdot\phi)}} \frac{r}{\cos(\phi)-\sin(\phi)}\,dr\,d\phi$

j) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=0}^{2} \frac{r}{\cos(\phi)^2}\,dr\,d\phi$

k) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{4\cdot\pi}\int_{r=0}^{1+\cos\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)} r\cdot\sin(\phi)\,dr\,d\phi$

l) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\phi} e^{r}\cdot\sin(\phi)\,dr\,d\phi$

m) $\displaystyle\int_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{2\cdot\pi}\int_{r=0}^{1-\sin(\phi)} r\,dr\,d\phi$

n) $\displaystyle\int_{\phi=3\cdot\pi}^{5\cdot\pi}\int_{r=0}^{\tan\left(\frac{\phi}{4}\right)} r\,dr\,d\phi$

o) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{2\cdot\pi}\int_{r=1}^{e^{-\phi}} \frac{1}{r}\,dr\,d\phi$

p) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{2\cdot\pi}\int_{r=1}^{\phi\cdot\cos(\phi)} r\,dr\,d\phi$

q) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\sin(\phi)} \frac{(r-2)^3}{r-2}\cdot\cos(\phi)\,dr\,d\phi$

r) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\sqrt{2\cdot\sin(2\cdot\phi)}} r\,dr\,d\phi$

s) $\displaystyle\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} (r\cdot\cos(\phi)+r\cdot\sin(\phi))\cdot r\,dr\,d\phi$

10.2.1 *Flächeninhalt*

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven

a)	$f(x)=\cos(x)$	$g(x)=x^2-2$	b)	$x^2+y^2=25$	$g(x)=5-x$
c)	$f(x)=\sin(2\cdot x)$	$g(x)=\cos(x)^2$	d)	$f(x)=\frac{3}{x}$	$g(x)=x^2-8$
e)	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$	$g(x)=x^2-2$	f)	$f(x)=\sqrt{9-x^2}$	$g(x)=3\cdot\sqrt{4-x^2}$
g)	$f(x)=x^2-2$	$g(x)=-x^2+2\cdot x+2$	h)	$f(x)=\sqrt{3-x^2}$	$g(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$
i)	$f(x)=x^2-2\cdot x-1$	$g(x)=3\cdot x-1$	j)	$f(x)=x+3$	$g(x)=\sqrt{9-x^2}$
k)	$f(x)=x^2-3$	$g(x)=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$	l)	$f(x)=x^2$	$g(x)=6-x$

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt, einer Ellipse der Gleichung:

$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$ mit Hilfe des Doppelintegrals

10.2.2 *Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche*

1) Berechnen Sie den Schwerpunkt der von f(x) und g(x) eingeschlossenen Fläche

a)	$f(x)=2-3\cdot x^2$	$g(x)=-x^2$	b)	$f(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$	$g(x)=\sqrt{4-x^2}$
c)	$f(x)=\ln(x)$	$g(x)=0$	d)	$f(x)=4-x^2$	$g(x)=x+2$

2)

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt eines 3/4 Kreises (Quadranten I-III) mit dem Radius R

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt einer 1/4 Ellipse (Quadrant I) der Gleichung

$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2$

3) Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Fläche, die durch die x-Achse und den Umfang der Funktionen $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ und $g(x)=3\cdot\sqrt{4-x^2}$ gebildet wird