11 Gewöhnliche Differentialgleichung

11.4.1 Trennung der Variablen

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen :

1) a) $y' - (x+2)\cdot y = 0$

b) $y\cdot y' = \sqrt{x\cdot y}$

c) $x^2\cdot y' = y^2$

d) $y'\cdot\left(1+x^2\right) = x\cdot y$

e) $y' = (1-y)^2$

f) $y'\cdot\sin(y) = -x$

g) $y' + (\cos(x))\cdot y = 0$ $\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\pi$

h) $x\cdot(x+1)\cdot y' = y$ $\qquad y(1) = \frac{1}{2}$

i) $y^2\cdot y' + x^2 = 1$ $\qquad y(2) = 1$

j) $\left(1-x^2\right)\cdot y' + x\cdot y = 2\cdot x$ $\qquad y(0) = 1$

k) $x^2\cdot y' - y^2 = x^2\cdot y\cdot y'$ $\qquad y(1) = -1$

l) $\frac{dx}{dy} = \sqrt{10\cdot x\cdot y + 2\cdot x - 35\cdot y - 7}$ $\qquad y(4) = 3$

2)

a) $\frac{y'}{y} = \sin(x)^2\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)^2} + 1\right) + \cos(x)^2$

b) $y' = \frac{2\cdot\left(x^2\cdot y - x\cdot y^2\right) + 3\cdot x\cdot(x-y)}{x-y}$

c) $y' = \sqrt{3\cdot y\cdot(x+3) - 4\cdot x - 12}$

d) $\left(y' + x + x^2 + y^2\right)\cdot(x-y) + y^3 = x^3$

e) $y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

f) $y'\cdot\left(1 - \frac{\cos(y)}{\sin(y)+\cos(y)}\right) = \frac{-x}{\cos(y)}$

g) $y' = \frac{1-2\cdot x}{y^2}$

h) $y'\cdot(\tan(x) - y) = a$

i) $y' = \frac{y^2 - y}{x}$

j) $x\cdot y\cdot y' = 1 - x^2$

k) $y' + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

l) $e^{-y}\cdot\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1$

m) $\dfrac{\sin(45\cdot°)\cdot\left(x\cdot\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)\cdot dx}{y\cdot\left(x^2-4\right)\cdot dy}$

n) $y'=10^{x+y}$

o) $y'\cdot\left(1+x^2\right)=-2\cdot x\cdot y^2$

p) $y'=\dfrac{3\cdot x^2\cdot y^2-12\cdot x^2-y^2+4}{y-2}$

q) $y\cdot y'(1+2\cdot x)=1-x^2+x\cdot y\cdot y'$

r) $y'\cdot\left(y-x^2\cdot y\right)=-x\cdot y^2+x$

s) $\dfrac{e^y\cdot\left(y'\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot e^y\right)}{y'\cdot\cos(x)-\sin(x)}=1$

t) $\dfrac{y'\cdot(y-2)}{x}=e^{x^2+\ln\left(y^2-4\right)+3}$

u) $\left(y^2+\dfrac{2}{y}\right)\cdot dx=y\cdot\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\cdot dy$

v) $\dfrac{x\cdot dy-2\cdot x^2\cdot\left(y^2-y\right)\cdot dx}{y^2\cdot x-x\cdot y}=0$

w) $\dfrac{(2-x)\cdot dy}{x\cdot y+2\cdot(x+y)+4}=\dfrac{dx}{(2+x)^2}$

11.4.2 *Integration einer Differentialgleichung durch Substitution*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Substitution :

a) $y'+2\cdot y=4\cdot x$

b) $y'=3\cdot x-2\cdot y+5$

c) $x\cdot y'=y+4\cdot x$

d) $x^2\cdot y'=\dfrac{1}{4}\cdot x^2+y^2$

e) $y'=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{y}{x}$

f) $y\cdot y'=x+\dfrac{y^2}{x}$ $\qquad y(1)=\sqrt{2}$

g) $x^2\cdot y'=y^2+x\cdot y$ $\qquad y(1)=-1$

h) $x^3\cdot y'=y\cdot\left(y^2+x^2\right)$

i) $y'=\dfrac{x^2+x\cdot y+y^2}{x^2}$

j) $\left(x-y\cdot\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)\cdot dx+x\cdot\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot dy=0$

11.4.3 *Lineare DGL 1. Ordnung*

1) Lösen Sie folgenden inhomogenen DGL 1. Ordnung

a) $y'-3\cdot y=x\cdot e^{4\cdot x}$

b) $y'+y\cdot\tan(x)=\sin(x)$

2) Bestimme die durch den Punkt P(0,1) gehende Integralkurve der DGL

$$\left(x^2+3\right)\cdot y' + 2\cdot x\cdot y = 24\cdot x^2 - 12\cdot x + 7$$

3) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL

a) $y' - y\cdot\cos(x) = \cos(x)$

b) $x\cdot y' - y = x^2\cdot e^{-x}$

c) $x\cdot y' - y = 2\cdot x\cdot\ln(x)$

d) $\left(x^2+1\right)\cdot y' - 3\cdot x^2 = -2\cdot x\cdot y$

e) $\frac{1}{2}\cdot y'\cdot\sin(2\cdot x) - y + \sin(x)^3 = 0$

f) $y' + \cos(x)\cdot y = \sin(x)\cdot\cos(x)$

g) $y' = e^{2\cdot x} - e^x\cdot y$

4) Lösen Sie das Anfangswertproblem

a) $x\cdot y' + y - e^x = 0 \qquad y(a) = b$

b) $y' - y\cdot\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad y(0) = 0$

5) Lösen Sie folgende DGL 1. Ordnung

a) $y' = \frac{y+1}{x}$

b) $x^2\cdot dy + (3 - 2\cdot x\cdot y)\cdot dx = 0$

c) $y'\cdot\tan(x) - y = a$

d) $y' + 2\cdot x\cdot y = x\cdot e^{-x^2}$

11.5 *Differentialgleichung zweiter Ordnung*

1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender DGL

a) $y'' - 6\cdot y' + 8\cdot y = 0$

b) $y'' + 10\cdot y' + 25\cdot y = 0$

c) $y'' + 4\cdot y' + 14\cdot y = 0$

d) $y'' + y = 0$

e) $y'' + 2\cdot y' + 17\cdot y = 0$

f) $y'' + y' = 0$

2) Bestimmen Sie die partikulären Lösungen

a) $y'' - y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = -1$

b) $y'' - 4\cdot y' + 4\cdot y = 0 \qquad y(1) = e^2 \qquad y(-1) = 0$

c) $y'' - 4\cdot y' + 3\cdot y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) = 1$

d) $y'' - y = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = -1$

e) $y'' + 2\cdot y' + 3\cdot y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 0$

f) $y'' - y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

3) Lösen Sie folgende DGL

a) $y'' + y = \cos(x) + x^2$

b) $y'' + y = x^3$

c) $y'' - 5\cdot y' + 6\cdot y = 2\cdot e^x \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = 6$

d) $y'' = x + \sin(x)$

e) $y'' - 6\cdot y' + 9\cdot y = 2\cdot e^x + 9\cdot x - 15$

f) $y'' + 2\cdot y' + 5\cdot y = \frac{5}{2}\cdot x + \frac{7}{2}$

g) $y'' + 4\cdot y = 10\cdot\sin(2\cdot x) + e^{-x} + 2\cdot x^2 - x$

4) Lösen Sie die DGL 2. Ordnung

a) $y'' + 10\cdot y' + 25\cdot x = 3\cdot\cos(5\cdot x)$

b) $y'' - 5\cdot y' + 4\cdot y = 3\cdot e^{4\cdot x}$

c) $y'' - 3\cdot y' + 2\cdot y = 2\cdot e^x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $5\cdot y'' - 6\cdot y' + 5\cdot y = e^{\frac{3\cdot x}{5}}\cdot\cos(x)$

e) $y'' + y = \cos(x)\cdot\cos(2\cdot x)$

f) $y'' + 9\cdot y' = e^x\cdot\cos(x)$

g) $y'' - 2\cdot y' = e^x\cdot\left(x^2 + x - 3\right) \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 2$