11 Gewöhnliche Differentialgleichung

11.4.1 Trennung der Variablen

1) a) $y = C \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x}$ b) $y = \sqrt[3]{\left(x \cdot \sqrt{x} + C\right)^2}$

c) $y = \dfrac{x}{1 + C \cdot x}$ d) $y = C \cdot \sqrt{1 + x^2}$

e) $y = \dfrac{x + C - 1}{x + C}$ f) $y = \operatorname{acos}\left(\dfrac{1}{2} \cdot x^2 + C\right)$

g) $y = C \cdot e^{-\sin(x)}$ spez. Lösung: $y = 2 \cdot \pi \cdot e^{1 - \sin(x)}$

h) $y = C \cdot \dfrac{x}{x + 1}$ spez. Lösung: $y = \dfrac{x}{x + 1}$

i) $y = \sqrt[3]{3 \cdot x - x^3 + 3 \cdot C}$ spez. Lösung: $y = \sqrt[3]{3 \cdot x - x^3 + 3}$

j) $(2 - y)^2 = K \cdot \left(1 - x^2\right)$ spez. Lösung: $x^2 + (2 - y)^2 = 1$

k) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \ln(|y|) + C$ spez. Lösung: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \ln(|y|) + 2$

l) $\dfrac{2}{15} \cdot \left(\sqrt{5 \cdot y + 1}\right)^3 = \sqrt{2 \cdot x - 7} + C$ spez. Lösung: $\dfrac{2}{15} \cdot \left(\sqrt{5 \cdot y + 1}\right)^3 = \sqrt{2 \cdot x - 7} + \dfrac{113}{15}$

2)

a) $y = C \cdot e^{\tan(x)}$ b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \left(C \cdot e^{x^2} - 3\right)$

c) $y = \dfrac{1}{3} \cdot \left[4 + \left[\sqrt{(x + 3)^3} + C\right]^2\right]$ d) $y = 1 + e^{\frac{x^2}{2} + C}$

e) $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \cos(C) + x \cdot \sin(C)$ f) $y = \arccos\left(\dfrac{x^2}{2} - C\right)$

g) $y = \sqrt[3]{3 \cdot x \cdot (1 - x) + C}$ h) $y = C \cdot \sin(x) - a$

i) $y = \dfrac{x \cdot C}{1 - x \cdot C}$ j) $y^2 + x^2 = \ln(x \cdot C)$

k) $\ln\left(\tan\left(\frac{y}{4}\right)\right) = C - 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

l) $y = \ln\left(1 - C\cdot e^{x}\right)$

m) $y^2 = 2\cdot\ln(x+2) + C$

n) $10^{x} + 10^{-y} = C$

o) $y = \frac{1}{\ln\left[C\cdot\left(1+x^2\right)\right]}$

p) $y = C\cdot e^{x\cdot\left(x^2-1\right)} - 2$

q) $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x + C$

r) $y^2 = 1 - C\cdot\left(1 - x^2\right)$

s) $y = \ln\left(\frac{C\cdot\cos(x)}{1 - C\cdot\cos(x)}\right)$

t) $y = e^{\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x^2}+3\right)+C} - 2$

u) $y = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{C}{1-x^2}\right)^3} - 2}$

v) $y = \frac{e^{x^2+C}}{e^{x^2+C} - 1}$

w) $y = C\cdot\sqrt[4]{\frac{2+x}{2-x}} - 2$

11.4.2 *Integration einer Differentialgleichung durch Substitution*

a) $y = C\cdot e^{-2\cdot x} - 2\cdot x + 1$

b) $4\cdot y - 6\cdot x - 7 = K\cdot e^{-2\cdot x}$

c) $y = 4\cdot x\cdot\ln(|C\cdot x|)$

d) $y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{x}{\ln(|C\cdot x|)}$

e) $y = 2\cdot x\cdot\operatorname{atan}(C\cdot x)$

f) $y = x\cdot\sqrt{2\cdot\ln(|C\cdot x|)}$ spez. Lösung : $y_p = x\cdot\sqrt{2\cdot\ln(|e\cdot x|)}$

g) $y = -\frac{x}{\ln(|C\cdot x|)}$ spez. Lösung : $y_p = -\frac{x}{\ln\cdot|e\cdot x|}$

h) $x = \frac{1}{C}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot y^2}}$

i) $y = x\cdot\tan(\ln(|C\cdot x|))$

j) $\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(|x|) = C$

11.4.3 *Lineare DGL 1. Ordnung*

1) a) $y_A = C\cdot e^{3\cdot x} + e^{4\cdot x}\cdot(x-1)$ b) $y_A = \cos(x)\cdot(C - \ln(|\cos(x)|))$

2) $y_A = \frac{1}{x^2+3}\cdot\left(8\cdot x^3 - 6\cdot x^2 + 7\cdot x + 3\right)$

3) a) $y_A = C\cdot e^{\sin(x)} - 1$ b) $y_A = x\cdot\left(C - e^{-x}\right)$

c) $y_A = x\cdot\left(C + \ln(x)^2\right)$ d) $y_A = \frac{C + x^3}{x^2+1}$

e) $y_A = C\cdot\tan(x) + \sin(x)$ f) $y_A = C\cdot e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$

g) $y_A = C\cdot e^{-e^{x}} + e^{x} - 1$

4) a) $y_{Ap} = \frac{a\cdot b + e^{x} - e^{a}}{x}$ b) $y_{Ap} = \frac{x}{\cos(x)}$

5) a) $y_A = C\cdot x - 1$ b) $_A = C\cdot x^2 + \frac{1}{x}$

c) $y_A = C\cdot\sin(x) - a$ d) $_A = e^{-x^2}\cdot\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$

11.5 *Differentialgleichung zweiter Ordnung*

1)

a) $y_0 = C_1\cdot e^{2\cdot x} + C_2\cdot e^{4\cdot x}$ b) $y_0 = \left(C_1\cdot x + C_2\right)\cdot e^{-5\cdot x}$

c) $y_0 = e^{-2\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\cos\left(\sqrt{10}\cdot x\right) + C_2\cdot\sin\left(\sqrt{10}\cdot x\right)\right)$

d) $y_0 = C_1\cdot\cos(x) + C_2\cdot\sin(x)$

e) $y_0 = e^{-x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(4\cdot x) + C_2\cdot\sin(4\cdot x)\right)$ f) $y_0 = C_1 + C_2\cdot e^{-x}$

2)

a) $y_p = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(2\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\right)\right)$ b) $y_p = \frac{x+1}{2}\cdot e^{2\cdot x}$

c) $y_p = \frac{e^{x-1} - e^{3\cdot x - 1}}{1 - e^2}$ d) $y_p = e^{1-x}$

e) $y_p = e^{-x}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right) + 2\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\right)$ f) $y_p = \frac{1}{2}\cdot e^{x} + \frac{1}{2}\cdot e^{-x}$

3)

a) $y_A = x^2 - 2 + C_1\cdot\cos(x) + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\cdot\sin(x)$

b) $y_A = C_1\cdot\cos(x) + C_2\cdot\sin(x) + x^3 - 6\cdot x$

c) $y_A = e^{x} + C_1\cdot e^{2\cdot x} + C_2\cdot e^{3\cdot x}$ $y_p = e^{x} + e^{2\cdot x} + e^{3\cdot x}$

d) $y_A = \frac{1}{6}\cdot x^3 - \sin(x) + C_2\cdot x + C_1$

e) $y_A = e^{3\cdot x}\cdot\left(C_1 + x\cdot C_2\right) + x - 1$

f) $y_A = e^{-x}\cdot\left(C_1\cdot\sin(2\cdot x) + C_2\cdot\cos(2\cdot x)\right) + \frac{1}{2}\cdot(x+1)$

g) $y_A = C_1\cdot\sin(2\cdot x) + \cos(2\cdot x)\cdot\left(C_2 - \frac{5}{7}\cdot x\right) + \frac{1}{5}\cdot e^{-x} + \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot x^2 - x - 1\right)$

4)

a) $y_A = \left(C_1 + C_2\cdot x\right)\cdot e^{-5\cdot x} + \frac{3}{50}\cdot\sin(5\cdot x)$

b) $y_A = e^{4\cdot x}\cdot\left(C_2 + x\right) + C_1\cdot e^{x}$

c) $y_A = C_1\cdot e^{2\cdot x} + C_2\cdot e^{x} - \frac{8}{5}\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

d) $y_A = e^{\frac{3}{5}\cdot x}\cdot\left(C_1\cdot\sin\left(\frac{4}{5}\cdot x\right) + C_2\cdot\cos\left(\frac{4}{5}\cdot x\right)\right)$

e) $y_A = C_1\cdot\sin(x) + C_2\cdot\cos(x) + \frac{1}{16}\cdot(4\cdot x\cdot\sin(x) + \cos(3\cdot x))$

f) $y_A = \frac{e^{x}}{85}\cdot(2\cdot\sin(x) + 9\cdot\cos(x)) + C_1\cdot\sin(3\cdot x) + C_2\cdot\cos(3\cdot x)$

g) $y = e^{x}\cdot\left(e^{x} - x^2 - x + 1\right)$