# 1 Mengen, reelle Zahlen, Gleichungen

## 1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

### 1.1.1 Mengenbildungsprinzip

Def.: Unter einer Menge verstehen wir die
**Zusammenfassung**
gewisser, unterschiedlicher Objekte, Elemente genannt,
**zu einer Einheit.**

Darstellungsformen:

- beschreibende Darstellung
  $M = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E_1, E_2, ...., E_N\}$

- aufzählende Darstellung

$M = \{a_1; a_2; ....; a_n\}$ endliche Menge
$M = \{a_1; a_2; ........\}$ unendliche Menge

Beispiel zur Darstellung:

1. beschreibende
   $M_1 = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl und Lösung der Gleichung } x^2 = 1\} =$
   $= \{-1; 1\}$
2. aufzählende
   Menge der natürlichen Zahlen $N = \{1; 2; 3; ...\}$

**Zugehörigkeit** zur Menge: $a \in M_1$: Element $a$ gehört zu der Menge $M_1$
$b \notin B$: $b$ ist kein Element der Menge B

Die **Lösung einer Gleichung** fassen wir zu einer Menge (Lösungsmenge) L zusammen.
Besitzt eine Gleichung keine Lösung, dann ist L eine leere Menge :

$$L = \{\ \}$$

Beispiel: $x^2 + 1 = 0$ Lösung hat keine reellen Zahlen $L = \{\ \}$

### 1.1.2 Mengenrelation

<u>Def.:</u> <u>Teilmenge:</u> Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

$A \subset B$ (A ist in B enthalten)

<u>Bsp.:</u> $A = \{1; 3; 5\}$ $B = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $A \subset B = \{1; 3; 5\}$

<u>Bsp.:</u> $M_1 = \{0; 2; 4\}$ $M_2 = \{2; 4; 6\}$ $M_1 \not\subset M_2$

<u>Def.:</u> <u>Gleiche Mengen</u>: $A = B$ Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist und umgekehrt.

### 1.1.3 Mengenoperation

Querschnitt ($\cap$) „Küchenrezept“: gemeinsamer Teil
(auch als Schnittmenge bezeichnet)
Vereinigung ($\cup$) „Küchenrezept“: alles
Differenz ( $\setminus$ )

$\cap$ ***Die Schnittmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.***

$A \cap B$ $a \in A \cap B$

$a \in A \quad \wedge \quad a \in B$

<u>Beispiel zu Schnittmenge: ein System von zwei Ungleichungen:</u>

$2x - 4 > 0$ <u>und</u> $x < 3$

$2x > 4$

$x > 2$

$L_1 = \{x \mid x > 2\}$ $L_2 = \{x \mid x < 3\}$

Die Schnittmenge von $L_1$ und $L_2$ ist die gesuchte Lösungsmenge L

$L = L_1 \wedge L_2 = \{ x \mid 2 < x < 3\}$

$\cup$ ***Die Vereinigungsmenge (SUMME) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören.***

$a \in A \cup B$

$a \in A \vee a \in B$

Beispiel zur Vereinigungsmenge

$M_1 = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
$M_2 = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$
$M_1 \cup M_2 = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$

\ ***Die Differenzmenge (Restmenge) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A; nicht aber zu B gehören.***

$a \in A \setminus B$
$a \in A \wedge a \notin B$

## 1.2 Reelle Zahlen R

### 1.2.1 Darstellungsformen der Probleme

Abb.: Darstellung reeller Zahlen auf einer Zahlengeraden

Eine Zahlengerade stellt ein eindimensionales Problem dar.

Ein Koordinatensystem beinhaltet ein zweidimensionales Problem.

Ein Raum beinhaltet ein dreidimensionales Problem.

### 1.2.2 Grundgesetze der Rechenoperationen (+); (-); (·); (:)

1. Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier reeller Zahlen ergibt wiederum eine reelle Zahl.
   (Die Division durch Null ist nicht erlaubt.)

2. Addition und Multiplikation sind kommutativ $a + b = b + a$
   $a \cdot b = b \cdot a$

3. Addition und Multiplikation sind
assoziative Rechenoperationen

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

distributive Rechenoperationen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ***!!!!!!!***

| | | |
|---|---|---|
| Bei Ungleichungen | $a \leq b$ | ($a$ kleiner $b$ oder $a$ gleich $b$) |
| | | $( \quad a < b \quad \vee \quad a = b \quad )$ |
| | $a \geq b$ | $( \quad a > b \quad \vee \quad a = b \quad )$ |

## 1.2.3 GRUNDLAGEN für das Lösen von Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen Z.

Algebra:

$- (-a) = a$ !!!!!!!

$- (a + b) = -a - b$ !!!!!!!

$(-a) \cdot b = -ab$ !!!!!!!

$(-a) \cdot (-b) = ab$ !!!!!!!

Potenzgesetze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^0 = 1$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad a^{n+1} = a^n \cdot a$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $\qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Wurzel:

$\sqrt[n]{a} = b \quad \Rightarrow \quad b^n = a \qquad a \geq 0 \,;\, n \in \mathrm{N}$

Logarithmus:

$\log_b a = n \quad \Rightarrow \quad b^n = a$

-wichtig bei Bestimmung der beiden Gleichungen $\quad a > 0 \quad b > 0$

-wichtig bei Bestimmung der Definitionsmenge $\quad b \neq 1$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$

### 1.2.4 Partialdivision / Polynomdivision

Beispiele:

1) $(49a^2 - 25x^2 - 9b^2 - 30bx) : (7a + 5x + 3b) = 7a - 5x - 3b$

2) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x^2 + 2x + 1) =$

3) $(x^3 - x^2 - 5x + 1) : (x - 3) =$

4) $(12a^5 - 8a^4b - 6a^2b^3 - 1) : (a - b) =$

## 1.3 Gleichungen

### 1.3.1 Quadratische Gleichungen

| | | |
|---|---|---|
| Allgemeine Form: | $ax^2 + bx + c = 0$ | $a \neq 0$ |
| Normalform: | $x^2 + px + q = 0$ | D = R |

**Definitionsmenge**: Menge aller Werte, für welche eine Gleichung erfüllt werden darf. Die Gleichung hat für alle Werte aus der Definitionsmenge einen Sinn.

**Die zu dieser Gleichung gehörende Funktion:**

Quadratische Funktion: $y = ax^2 + bx + c$ (Parabel)

1. $a > 0$
2. $a < 0$

Abb.: Quadratische Funktion für 1. $a > 0$ und 2. $a < 0$

Nullstellen:

| Allgemeine Form | Normalform |
|---|---|
| $ax^2 + bx + c = 0$ | $x^2 + px + q = 0$ |

Diskriminante $\Delta$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## Fallunterscheidung für die Allgemeine Form der Quadratischen Gleichung

| Fall a: $\Delta > 0$ | Fall b: $\Delta < 0$ | Fall c: $\Delta = 0$ |
|---|---|---|
| $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_1$, $x_2$ sind komplexe Zahlen<br>$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-b}{2a}$ |
| $a > 0$ | $a > 0$ | $a > 0$ |
| $a < 0$ | $a < 0$ | $a < 0$ |
| $ax^2 + bx + c =$<br>$a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ | $ax^2 + bx + c =$<br>$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$ | $ax^2 + bx + c =$<br>$= a(x - x_0)^2$ |

Satz von VIETA:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

oder

$x^2 + px + q = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

<u>Beispiel:</u>

1) $x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = 2$

2) $2x - (x + 2)^2 = (x - 2)^2 - 4(x + 1)$ D = R

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$

3) $\dfrac{x^2 + 2x}{2x^2 + 2x - 4} = 1$ $D = R \setminus \{x | 2x^2 + 2x - 4 = 0\}$

L = {2}

### 1.3.2 Bi-quadratische Gleichungen

Eine algebraische Gleichung 4. Grades vom speziellen Typ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

(es treten nur gerade Potenzen auf)

heißt bi-quadratisch und läßt sich durch die Substitution

$$x^2 = z$$

in eine quadratische Gleichung überführen.

<u>Beispiel:</u>

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

L = {-3, -1, 1, 3}

### 1.3.3 Kubische Gleichungen

Allgemeine Form: $\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$ $\quad /:a \quad , a \neq 0$

D = R

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Substitution $\quad x = z - \frac{b}{3a}$

$$\left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

.

.

.

Normalform: $\boxed{z^3 + 3pz + 2q = 0}$

mit $\quad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad$ und $\quad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$

Lösungen in Bronstein, Semendjajew in „Eigene Formelsammlung“

Kubische Funktion $\quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

## 1.3.4 Wurzelgleichungen

Eine Gleichung in der eine Wurzel vorkommt.

**Die zu dieser Gleichung gehörende Funktion:**

$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{Wurzelfunktion}$$

Abb.: $y = x^{\frac{1}{2}}$ $y = x^{\frac{3}{2}}$ $y = x^{\frac{1}{3}}$

Funktion: $y = x^{-\frac{m}{n}}$

Abb.: $y = x^{\frac{-3}{2}}$ $y = x^{\frac{-1}{3}}$ $y = x^{\frac{-2}{3}}$

Allgemeine Formeln für natürliche Potenzen $n, m \in \mathbb{N} \quad x \in \mathbb{R}$

**AUSWENDIG. NOTWENDIG ZUR LÖSUNG DER WURZELGLEICHUNGEN**

1) $x^0 = 1$ für $x \neq 0$

2) $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ für $x \neq 0$

3) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ für $x > 0$

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

4) $x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Umformungen mit Potenzen und Wurzeln

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \qquad \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \qquad \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x} = x^{\frac{1}{n\cdot m}}$$

$$(x^m)^n = x^{m\cdot n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{A\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = \dfrac{A\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y} \\[2ex] \dfrac{A}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{A\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \dfrac{A\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{array}$$

Beispiel:

1) $7+3\sqrt{2x+4}=16$ D = {$x$|$x \geq -2$}

$L=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

2) $\sqrt{2x+19}+5=0$ D = {$x$|$2x + 19 \geq 0$}

Probe:

3) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$ D =

Probe:

L = {1}

### 1.3.5 Exponentialgleichungen

Die Variable tritt ausschließlich im Exponenten auf.

**Die zu dieser Gleichung gehörende Exponentialfunktion:**

$$y = a^x, \qquad a > 0\,, \qquad a \neq 1$$

Abb. a > 1 a < 1

## Lösungsmethoden:

**1) DURCH EXPONENTENVERGLEICH**

Beispiel:

1) $a^{x+2} = a^{2\cdot(x-5)}$ Endgestalt

$x = 12$

2) $2^{4\cdot x} = 8^{x+2}$

$x = 6$

## 2) DURCH LOGARITHMIEREN

Beispiel 1) $10^x = 2$ / log. oder direkt aus der Def.

$x = \log 2$

Beispiel 2) $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$ / log.

$$x = \frac{-4 \lg 2}{\lg 3 - 3 \lg 2} \approx 2{,}83$$

Beispiel 3) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+2}$ $x \approx -2{,}97$

## 3) DURCH SUBSTITUTION $A^x = Z$

Beispiel:

1) $10^{2x} - 10^x = 90$

$x = 1$

2) $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$ D = R $x_1 = \ln 3$ , $x_2 = \ln 2$

## Allgemeine Exponentialformeln

**AUSWENDIG.** NOTWENDIG ZUR LÖSUNG DER EXPONENTIALGLEICHUNGEN

$a^x$ , $a > 0$ und $x \in R$

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

4) $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}} = (a^x)^{\frac{1}{y}}$

5) $b = (a^{\log_a b})$

Beweis: beidseitiges Logarithmieren

$$\log_a b = \log_a (a^{\log_a b})$$

$$\log_a b = \log_a b \cdot \underbrace{\log_a a}_{= 1}$$

<u>Beispiel:</u>

1) $9^x = 27$

$L = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

2) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ D = {x|x ≥ -1} L = {35}

### 1.3.6 Logarithmische Gleichungen

Jede positive reelle Zahl ($r > 0$) ist als Potenz einer beliebigen positiven Basiszahl ($a > 0$ , $a \neq 1$) darstellbar:

$$r = a^x$$

daraus wird der Exponent $x$ als Logarithmus definiert

$$x = \log_a r$$

Wenn die Variable $x$ ausschließlich im Argument von Logarithmusfunktionen auftritt $y = \log_a x$ werden sie als logarithmische Gleichungen bezeichnet.

Durch die Forderung, daß alle Argumente positiv sein müssen, ist es unbedingt erforderlich den Definitionsbereich der Ausgangsgleichung zu bestimmen.

**Die zu dieser Gleichung gehörende Funktion:**

Logarithmusfunktion: $y = \log_a x$

Definitionsbereich: $x > 0$ !
$a > 0$
$a \neq 1$

Abb.: Logarithmische Funktion für a > 0 und a ≠ 1

# Allgemeine Logarithmische Regeln

**AUSWENDIG. NOTWENDIG ZUR LÖSUNG DER LOGARITHMISCHEN GLEICHUNG**

$r = a^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_a r$

$r > 0 \,, \quad a > 0 \,, \quad a \neq 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$ und $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

$\log_e r = \ln r$

$\log_{10} r = \log r = \lg r$ ; BRIGGscher Logarithmus

$\log_a (r_1 \cdot r_2) = \log_a r_1 + \log_a r_2$

$\log_a \frac{r_1}{r_2} = \log_a r_1 - \log_a r_2$

$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$

$\lg r = \frac{\ln r}{\ln 10} = \frac{\ln r}{2{,}3026} = 0{,}4343 \cdot \ln r$

$\ln r = \frac{\lg r}{\lg e} = \frac{\lg r}{0{,}4343} = 2{,}3026 \cdot \lg r$

$a^b = e^{\ln a^b}$

Beispiel:

1) $\log_5 x + \log_5 (2x - 1) = \log_5 (x + 4)$

L = {2}

2) $$\frac{\ln(x-1)+2}{\ln(x-1)-1} = 4$$ L = $\{1 + e^2\}$

### 1.3.7 Trigonometrische (Goniometrische) Gleichungen

**Die zu diesen Gleichungen gehörenden Funktionen:**

Sinus- und Kosinusfunktion

Abb.: Sinusfunktion

Abb.: Kosinusfunktion

Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion ($k \in Z$)

| | $y = \sin x$ | $y = \cos x$ |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $-\infty < x < \infty$ | $-\infty < x < \infty$ |
| Wertebereich | $-1 \leq y \leq 1$ | $-1 \leq y \leq 1$ |
| Periode | $2\pi$ | $2\pi$ |
| Symmetrie | ungerade | gerade |
| Nullstellen | $x_k = k \cdot \pi$ | $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ |
| Relative Maxima (bei $y = 1$) | $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ | $x_k = k \cdot 2\pi$ |
| Relative Minima (bei $y = -1$) | $x_k = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ | $x_k = \pi + k \cdot 2\pi$ |

## Tangens- und Kotangensfunktion

Abb.: Tangensfunktion

Abb.: Kotangensfunktion

Eigenschaften der Tangens- und Kotangensfunktion ($k \in$ Z)

| | $y = \tan x$ | $y = \cot x$ |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $x \in$ R mit Ausnahme der Stellen $x_k = \frac{p}{2} + k \cdot p$ | $x \in$ R mit Ausnahme der Stellen $x_k = k \cdot p$ |
| Wertebereich | $-\infty < y < \infty$ | $-\infty < y < \infty$ |
| Periode | $p$ | $p$ |
| Symmetrie | ungerade | ungerade |
| Nullstellen | $x_k = k \cdot p$ | $x_k = \frac{p}{2} + k \cdot p$ |
| Pole | $x_k = \frac{p}{2} + k \cdot p$ | $x_k = k \cdot p$ |
| Vertikale Asymptoten | $x = \frac{p}{2} + k \cdot p$ | $x = k \cdot p$ |

## Einige wichtige Allgemeine Trigonometrische Regeln

NOTWENDIG ZUR LÖSUNG DER TRIGONOMETRISCHEN GLEICHUNGEN
DER REST IN BRONSTEIN & SEMENDJAJEW

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

$\frac{p}{2}$ verursacht die **Transformation** der trigonometrischen Funktion:

$$\cos\left(\frac{p}{2} - x\right) = +\sin x \qquad \cos\left(\frac{p}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{p}{2} - x\right) = +\cos x \qquad \sin\left(\frac{p}{2} + x\right) = +\cos x$$

$$\tan\left(\frac{p}{2} - x\right) = +\cot x \qquad \tan\left(\frac{p}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\cot\left(\frac{p}{2} - x\right) = +\tan x \qquad \cot\left(\frac{p}{2} + x\right) = -\tan x$$

Die Vorzeichenregel für die neue Funktion

Die neue Funktion erhält das Vorzeichen von der Funktion, aus der sie entstanden ist
(oder anders ausgedrückt: das Vorzeichen für die transformierte Funktion bestimmt die alte Funktion).

π verursacht keine **Transformation**:

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$$

$$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan x$$

$$\cot(\pi \pm x) = \pm \cot x$$

Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Elementare trigonometrische Beziehungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Formeln für den „doppelten“ Winkel

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Umrechnungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$$

$$1+\tan^2 x = \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$1+\cot^2 x = \frac{\cot^2 x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm \frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Formeln für Summen und Differenzen

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

## LÖSUNGSMETHODE

Eine allgemeine Lösungsmethode läßt sich nicht angeben.

ABER (KÜCHENREZEPT)

egal wie kompliziert die trigonometrischen Ausdrücke / Funktionen in der Gleichung erscheinen, gilt in der Regel:

Man muß sie so lange umformen bis man zu dem

LETZTEN ELEMENTAREN AUSDRUCK GELANGT, UND ZWAR:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(nx) = 0 \\ \cos(nx) = 0 \\ \tan(nx) = 0 \\ \cot(nx) = 0 \end{array}} \qquad \text{z.B.} \qquad \begin{array}{r} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \tan 5x = 0 \\ \cot 3x = 0 \end{array}$$

Beispiel:

$$\sin x + \cos x = 1$$

Lösung: $x = 2\,k\,p$ ; $k = \pm\, 0, 1, 2, \ldots$

$$x = \frac{p}{2} + 2kp \quad ; \quad k = \pm\, 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Beispiel:</u>

$\cos x + \cos 2x = 0$

$$L\begin{cases} x_1 = p + 2kp \\ x_2 = \frac{p}{3} + 2kp \\ x_3 = -\frac{p}{3} + 2kp \end{cases} \qquad ; k = \pm\, 0, 1, 2, \ldots$$

## 1.4 Ungleichungen

Lösungen sind in der Regel **INTERVALLE**.

Es gelten die gleichen mathematischen Regeln wie bei den Gleichungen.

**Ausnahme:**

BEI MULTIPLIKATION (BZW. DIVISION) BEIDER SEITEN MIT EINER NEGATIVEN ZAHL $K < 0$ SIND DIE RELATIONSZEICHEN WIE FOLGT ZU ÄNDERN:

aus $<$ wird $>$,

aus $\leq$ wird $\geq$,

aus $>$ wird $<$,

aus $\geq$ wird $\leq$.

Wichtigster Unterschied und gleichzeitig eine Regel:

Bei Ungleichungen muß eine FALLUNTERSCHEIDUNG vorgenommen werden.

Beispiel:

1) $13x - 5 < 18x + 5$ ; D = R

L: $x \in (-2 ; \infty)$

2) $\frac{2x+1}{x-1} < 1$ ! Fallunterscheidung !

$L_G = L_1 \cup L_2 = (-2 ; 1)$

## 1.5 Betrag

Unter dem Betrag $|x|$ von $x \in \mathrm{R}$ versteht man die nicht negative Zahl.

$$|x| = \begin{Bmatrix} x & \text{für} & x \geq 0 \\ -x & \text{für} & x \leq 0 \end{Bmatrix}$$

Beispiel:

| | |
|---|---|
| $|-13| = 13$ | $|3 - 5| = |5 - 3| = 2$ |
| $|25| = 25$ | $|1 - |5 - 3|| = |1 - 2| = 1$ |

Betragsgleichungen

$$|x - 4| = 3x + 5$$

aus der Def.: Fall I

$x - 4 \geq 0 \quad \wedge \quad (x - 4) = 3x + 5$

Fall II

$x - 4 < 0 \quad \wedge \quad -(x - 4) = 3x + 5$

## 1.6 Binomischer Lehrsatz, Fakultät

Unter einem Binom versteht man eine Summe aus zwei Gliedern der allgemeinen Form

$$a + b\,.$$

Die $n$-te Potenz eines solchen Binoms läßt sich dabei nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

Dabei bedeuten:

$n \in \mathrm{N}$

$(a+b)^n$ : $n$-te Potenz eines Binoms

$\binom{n}{k}$ : („$n$ über $k$“) Entwicklungskoeffizienten (Binomialkoeffizienten)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k-1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot k) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot n-k)} =$$

$$= \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{k!}$$

(n - 1)! n = n!
n! (n + 1) = (n + 1)!

n! : Fakultät
n! = 1·2·3·4·5·.....·(n - 2)·(n - 1)·n

Beispiele:

$5! \cdot 6 = 6!$ $\quad$ $8! \cdot 9 = 9!$ $\quad$ $6! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6$

$\binom{n}{0} = 1$ $\qquad$ $\binom{5}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$ $\qquad$ $\binom{5}{1} = 5$

$\binom{n}{n} = 1$ $\qquad$ $\binom{5}{5} = 1$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \Rightarrow \quad \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ Symmetrie

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = \binom{8+1}{3} = \binom{9}{3}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Nach Anwendung der oben angegebenen Zusammenhänge lautet der Binomische Lehrsatz:

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{2! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28$ $\qquad$ $\binom{-8}{3}$ nicht definiert

$\binom{5}{3} =$

$\binom{9}{-2}$ nicht definiert

$\binom{16}{11} =$

$n = 0 \quad (a+b)^0 = 1$

$n = 1 \quad (a+b)^1 = a+b$

$n = 2 \quad (a+b)^2 = a^2 + \binom{2}{1}ab + b^2$

$n = 3 \quad (a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

.

.

$n = 5 \quad (a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

Binomialkoeffizienten

Sie können auch direkt aus dem folgenden sogenannten PASCALschen Dreieck abgelesen werden

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Das PASCALsche Dreieck entsteht durch Addition der Summanden:

| | | | | | | | | | | | | | | | | *n*-te Potenz des *a* + *b* Binoms Zeilenzahl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 0 |
| | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | 1 |
| | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | | | 2 |
| | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | | | 3 |
| | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | | | 4 |
| | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | | | 5 |
| | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | | | 6 |
| 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 | | 7 |

Der Koeffizient $\binom{n}{k}$ steht dabei in der

*n*-ten Zeile an

(*k* + 1)-ter Stelle

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10 \qquad \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3} = 35$$

Damit kann die *n*-te Potenz eines (*a* + *b*) Binoms bestimmt werden:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Ersetzt man den Summanden *b* durch - *b* , so erhält man die Entwicklungsformel für die Potenz

$$(a - b)^n$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

Beispiel:

1) $$\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

2) $$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} =$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{k+1}{n-k}$$

3) $$\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \qquad = \frac{10}{n+1}$$

4) $$\frac{\frac{1}{(2n+3)!\cdot 2^{2n+3}}}{\frac{1}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}} =$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{1}{8\cdot(n+1)(2n+3)}$$

5) $$\frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}} =$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$