4 Differentialrechnung

4.1 Ableitung einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ ist in einer Umgebung $x = x_0$ definiert.

Abb.: Differenzenquotient

Man kann immer einen Quotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ bilden,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der als Differenzenquotient bezeichnet wird.

Eine Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert (siehe Kap. 3)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Dieser Grenzwert heißt 1. Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 und wird mit

$$f'(x_0)$$

bezeichnet.

Es gibt auch folgende Bezeichnungen:

$$y'(x_0) \quad , \qquad y'\big|_{x=x_0} \quad , \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Und der Name: Differentialquotient 1. Ordnung

<u>Beispiel:</u> Mit Hilfe der Definition soll man die 1. Ableitung der Funktion $y = x^3$ an der Stelle x_0 berechnen.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{Gl. (B1)}$$

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3$$

$$f(x_0) = x_0^{\ 3}$$ damit: in die Gl. (B1)

<u>Satz über den</u>
Zusammenhang der <u>1. Ableitung</u> und dem <u>Anstieg</u> einer Kurve:

Ist $y'(x_0) > 0$, so muß die Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ansteigen.

Wenn $y'(x_0) < 0$ ist, dann muß die zugehörige Kurve an der betrachteten Stelle fallen.

Abb. Zur Ableitung einer Funktion

4.2 Die Technik des Differenzierens

4.2.1 Die Differentiation einiger elementarer Funktionen

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
Konstante Funktion	c_n	0
Potenzfunktion	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$a^x \cdot (\ln a)$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot (\ln a)}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Jede Abweichung einer Funktion (die abgeleitet werden soll) von der elementaren Funktion, die sich in der 1. Spalte der Tabelle befindet, bedeutet eine verkettete Funktion.

4.2.2 Differentiationsregeln

Faktorregel

$$y = C \cdot f(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = C \cdot f'(x)$$

Summenregel

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$

Produktregel bei zwei Funktionen

$$y = u(x) \cdot v(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Produktregel bei drei Funktionen

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \qquad \Rightarrow$$

$$y' = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel

Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als:

Produkt aus äußerer und innerer Ableitung

$$y = F(u(x)) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = F'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$F'(u)$ - äußere Ableitung
$u'(x)$ - innere Ableitung

oder $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Zur Kettenregel

1. Für die Ableitung elementarer Funktionen wurden die Formeln im Kap. 4.2.1 angegeben. Sie gelten nur für die elementaren Funktionen.

   Elementare Funktionen sind folgende Funktionen, bei welchen das Argument *x* in seiner elementaren Form

   „ *x* “

   vorkommt:

   $$y = x^n$$

   $$y = \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \cot x$$

   $$y = e^x, \quad a^x$$

   $$y = \ln x, \quad \log_a x$$

   $$y = \sqrt{x}$$

2. ***Jede*** Abweichung von dieser Form bedeutet, daß nicht die elementare Funktion vorliegt. In diesem Fall hat man mit einer ***verketteten*** Funktion zu tun. Eine verkettete Funktion ist demnach eine ***Zusammensetzung*** von elementaren Funktionen.

   $$y = \sin 2x, \quad \sin^2 x, \quad \sin x^2, \quad \sin\left(x^2 - 5\right)$$

   $$y = e^{2x}, \quad a^{x^2}, \quad a^{x+5}, \quad a^{-x+1}$$

   $$y = 2 \cdot \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + e^{2x}}\right)$$

   $$y = \sqrt{\frac{4 - x^2}{4 + x^2}}$$

Beispiel:

1) $y = (3x - 4)^8$

$y' = 8 \cdot (3x - 4)^7 \cdot 3 = 24 \cdot (3x - 4)^7$

2) $y = e^{4x^2 - 3x + 2}$

3) $y = 10 \cdot \ln\left(1 + x^2\right)$

4) $y = \sqrt{e^{\sin^2(w \cdot x - j)}}$

5) $y = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

4.2.3 Die Differentiation impliziter Funktionen

Die Differentiation einer Funktion in der impliziten Form

$$F(x,y)=0$$

läßt sich wie folgt bestimmen:

Schritt 1: Gliedweise Differentiation der Funktionsgleichung $F(x,y)=0$ nach x, wobei die Variable <u>y als Funktion von x</u> anzusehen ist.

Schritt 2: Auflösung der differenzierten Funktionsgleichung nach

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

<u>Beispiel:</u>

$$F(x,y)=2y^3+6x^3-24x+6y=0$$

$$F'(x,y)=6y^2\cdot y'+18x^2-24+6y'$$

$$F'(x,y)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 6y^2\cdot y'+18x^2-24+6y'=0$$

$$y'\cdot\left(6y^2+6\right)=24-18x^2$$

$$y'=\frac{4-3x^2}{y^2+1}$$

<u>Beispiel:</u>

$$x^5-y^2=0$$

$$F'(x,y)=5x^4-2y\cdot y'=0$$

$$y'=\frac{5x^4}{2y}$$

Beispiel:

1) $xy - a = 0$ oder $y + xy' = 0$

2) $x \cdot \cos y = c$

3) $y^2 - x^3 + x^2 e^y = 0$

4) $\sin x + \sin y - xy = 0$

4.2.4 Differentiation durch Logarithmieren
(logarithmische Differentiation)

Gegeben sei die Funktion $y = f(x)$

Bildet man $\ln|y| = \ln|f(x)|$,

so kann unter Beachtung der Kettenregel von dieser neuen Funktion die Ableitung gebildet werden.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{d}{dx}\left[\ln|f(x)|\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y' = y \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln|f(x)|\right]}$$

<u>Regel für die logarithmische Differentiation:</u>

Ist die Differentiation einer Funktion $y = f(x)$

- schwierig oder

- überhaupt nicht möglich,

so kann man den Logarithmus dieser Funktion bilden und innerhalb des Differenzierbarkeitsbereiches dieser neuen Funktion die Ableitung der gegebenen Funktion ermitteln:

$$y = f(x) \xrightarrow{\textit{Logarithmieren}} \ln|y| = \left[\ln|f(x)|\right] \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

<u>Beispiel:</u>

1) $$y = e^{2x^2}$$

Nach herkömmlicher Differentiation (Kettenregel):

$$y' = e^{2x^2} \cdot 4x$$

$$y' = 4x \cdot e^{2x^2}$$

Methode des Logarithmierens:

$$\ln|y| = \ln\left(e^{2x^2}\right) = 2x^2 \ln e = 2x^2$$

$$y' = 4x \cdot e^{2x^2}$$

<u>Beispiel:</u>

2) $$y = x^x$$

Diese Aufgabe ist mit den herkömmlichen Mitteln nicht lösbar.

$y = x^x$ ist keine Potenzfunktion $\left(y = x^n\right)$, da der Exponent nicht konstant ist.

$y = x^x$ ist keine Exponentialfunktion $\left(y = a^x\right)$, da die Basis nicht konstant ist.

Methode des Logarithmierens:

$$y = x^x$$

$$y' = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

4.2.5 Differentiation von Funktionen in Parameterdarstellung

$$x = x(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \mathrel{\hat{=}} \frac{d}{dt}[x(t)]$$

$$y = y(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} \mathrel{\hat{=}} \frac{d}{dt}[y(t)]$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

<u>Beispiel:</u>

Berechne $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ und $y' = \frac{dy}{dx}$ der Funktion:

$$x(t) = R\cos t$$

$$y(t) = R\sin t \qquad , t \in [0;2p]$$

$$\dot{x}(t) = -R\sin t$$

$$\dot{y}(t) = R\cos t$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\cot t$$

$$y' = \frac{\frac{x}{R}}{-\frac{y}{R}} = -\frac{x}{y}$$

<u>Beispiel:</u>

1) $$x(j) = \frac{a}{2}(1 - \cos 2j)$$

$$y(j) = a\left(\tan j - \frac{1}{2}\sin 2j\right) \qquad , \ j \in \left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 j} - \cos 2j}{\sin 2j}$$

2) $$x(t) = \sin^3 t \quad , \quad y(t) = \cos^3 t$$

$$y' = -\cot t$$

4.3 Differential einer Funktion

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx = df}$$

heißt das Differential einer Funktion

Abb.: Zum Differential einer Funktion

$$\frac{dy}{dx} = \tan a \qquad , \qquad \tan a = f'(x_0)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\Delta y = dy = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

4.4 Höhere Ableitungen von Funktionen

Wenn die Ableitung $y' = f'(x)$ einer Funktion in einem Intervall $I = [\,a,b\,]$ definiert und dort überall differenzierbar ist, dann wird die Ableitung von

$$y' = f'(x)$$

als zweite Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ bezeichnet.

$$\boxed{y'' = [\,f'(x)]' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}}$$

<u>Bezeichnungen:</u>

y'' „y zwei Strich“

$f''(x)$ „f zwei Strich von x“

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ „d zwei y nach dx-Quadrat“

$\downarrow$

Differentialquotient zweiter Ordnung

$$y''' = [\,f''(x)]' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(4)} = [\,f'''(x)]' = f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$y^{(n)} = [\,f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Beispiel:

1) $y = x^5$

$y' = 5x^4$

$y'' = 20x^3$

$y''' = 60x^2$

$y^{IV} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

2) $y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$

$y' =$

$y'' =$

$y''' =$

$y^{(4)} =$

$y^{(5)} =$

3) $y = x^2 \sin 2x$

Beispiel:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{x^2 - 3x}{\left(x^2 + 2x - 3\right)^2}$$

$$y'' =$$

Im nächsten Schritt nicht ausmultiplizieren sondern gemeinsame Faktoren, falls existieren, ausklammern.

$$y'' = 4 \cdot \frac{-2x^3 + 9x^2 + 9}{\left(x^2 + 2x - 3\right)^3}$$

Souveränität

Bei der Bildung höherer Ableitungen ist es unbedingt erforderlich **vorausschauend** zu arbeiten, um zu erkennen, ob eine **Vereinfachung** des entstandenen Ausdrucks für die weitere Arbeit von Vorteil ist, oder nicht.

Dazu ist viel Erfahrung notwendig, die man nur dadurch erwerben kann, indem man **möglichst viele Aufgaben** selbständig zu lösen versucht.

Um die Aufgaben aus der Differentialrechnung erfolgreich lösen zu können sind fundierte Kenntnisse und sichere **Fertigkeiten in allen Gebieten der elementaren (!!!!!) Mathematik** sehr wichtig.

4.4.1 Zweite Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung

Die zweite Ableitung y'' der Funktion in Parameterdarstellung x(t), y(t) lautet:

$$\boxed{y'' = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3}}$$

Dazu sind die zweiten Ableitungen nach der Zeit notwendig $(\ddot{x}; \ddot{y})$.

Es ist auch eine andere Formel möglich:

$$y'' = \frac{d}{dx} \cdot (y'(t)) = \frac{d}{dt} \cdot (y'(t)) \cdot \frac{dt}{dx} =$$
$$= \frac{d}{dt} \cdot (y'(t)) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt} \cdot (y'(t)) \cdot \frac{1}{\dot{x}}$$

$$\boxed{y'' = \frac{1}{\dot{x}} \cdot \frac{d}{dt} \cdot (y'(t))}$$

Beispiel:

Berechne die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktion.

$$x(t) = \sin^3 t \qquad , \qquad y(t) = \cos^3 t$$

$$y' = -\cot t \qquad , \qquad y'' = \frac{1}{3\sin^4 t \cos t}$$

Beispiel:

$$x(t) = t + 1 \qquad , \qquad y(t) = t^2 - 1$$

$$y' = 2t \qquad , \qquad y'' = -2$$

4.5 Regel von de l'Hospital

(Unbestimmte Ausdrücke)

Die Regel von de l'Hospital dient zur Berechnung unbestimmter Ausdrücke folgender Form:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\cdot\infty \qquad \infty-\infty$$

$$1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

Sind die beiden Funktionen

$y = f(x)$ und

$y = g(x)$

in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ definiert und differenzierbar und ist dort

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{und}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

so kann der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

dadurch berechnet werden, indem man die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ bildet und den Limes des Quotienten dieser Ableitungen bildet.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Grenzwertberechnung nach Bernoulli und l'Hospital

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\\[2ex] \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\end{array}}$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\to\frac{0}{0} \qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}\to\frac{\infty}{\infty}$$

Unbestimmter Ausdruck:

Funktion $f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Umformung zu $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$
$u(x)\cdot v(x)$	$0\cdot\infty$ $\infty\cdot 0$	$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}\Rightarrow\dfrac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ bzw. $\dfrac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
$u(x)-v(x)$	$\infty-\infty$	$\dfrac{\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)\cdot v(x)}}$
$u(x)^{v(x)}$	$0^0\quad\infty^0\quad 1^\infty$	$e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$

$$u(x)^{v(x)}=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$$

Beispiel:

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \qquad = 1$$

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2x-1)}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \qquad = 0$$

3) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \to \infty - \infty =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$$

4) $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1^\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e^1 = e$$