# 6 Komplexe Zahlen

| | | |
|---|---|---|
| Natürliche Zahlen | N | = {0,1,2,...} |
| Ganze Zahlen | G | = {...,-2,-1,0,1,2,...} |
| Reelle Zahlen | R | = (-∞,+∞) |
| Komplexe Zahlen | C | |

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{G} \subset \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$$

## 6.1 Definition und Darstellungsformen der komplexen Zahlen

Def.: Die formale Summe aus einer reellen Zahl $a$ und einer imaginären Zahl $bj$ heißt

komplexe Zahl

$$\boxed{z = a + bj} \qquad \text{mit } a,b \in \mathrm{R}$$

$a$ - Realteil $\qquad a = \mathrm{Re}\,(z)$
$b$ - Imaginärteil $\qquad b = \mathrm{Im}\,(z)$

Unter der imaginären Einheit $j$ versteht man diejenige Zahl, deren Quadrat den Wert -1 besitzt

$$\boxed{j^2 = -1}$$

Die zu

$$\boxed{z = a + bj}$$

konjugiert komplexe Zahl ist

$$\boxed{\overline{z} = a - bj}$$

Damit ist ersichtlich, daß jede komplexe Zahl $z$ durch ein reelles Zahlenpaar $(a,b)$ festgelegt wird.

Zur geometrischen Interpretation der komplexen Zahlen benötigt man eine sogenannte komplexe Zahlenebene (GAUSSsche Zahlenebene).

1. Methode

2. Methode

## 6.2 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

### 6.2.1 **Arithmetische Form**

$$\boxed{z = a + bj}$$

### 6.2.2 **Goniometrische Form**

$$\boxed{z = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)}$$

$$z = r\cos\varphi + j \cdot r\sin\varphi$$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad$ $r \geq 0$ $\quad$ Betrag der komplexen Zahlen

$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ $\quad$ $\varphi$ $\quad$ Phasenwinkel

$$0 \leq \varphi < 2\pi \ ; \ 0° \leq \varphi < 360°$$

$$\boxed{a = r\cos\varphi \ ; \ b = r\sin\varphi}$$

### 6.2.3 **Exponentialform**

$$\boxed{z = r \cdot e^{j\varphi}} \qquad e^{j\varphi} = e^{j(\varphi + 2k\pi)}$$

dabei ist: $\quad e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ $\quad$ EULERsche Gleichung

## 6.3 Rechenregeln der komplexen Zahlen

### 6.3.1 Die vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

A Arithmetische Form

Für komplexe Zahlen in arithmetischer Form gelten die selben Rechenregeln wie für reelle Binome, wobei nur die Beziehung $j^2 = -1$ zu beachten ist.

Beispiel: $z_1 = 2 - 5j$ , $z_2 = 4 + 3j$

Addition: $z_1 + z_2 = 2 - 5j + 4 + 3j = 6 - 2j$

Subtraktion: $z_1 - z_2 = 2 - 5j - 4 - 3j = -2 - 8j$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (2 - 5j) \cdot (4 + 3j) = 8 + 6j - 20j - 15j^2$

$z_1 \cdot z_2 = 8 + 15 - 14j = 23 - 14j$

Division:

| | |
|---|---|
| Zuerst: | Erweitern des Bruches mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners |

$$(a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 - j^2 b^2 = a^2 - (-1) \cdot b^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{(a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 + b^2}$$

Beispiel:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 5j}{4 + 3j} = \frac{(2 - 5j) \cdot (4 - 3j)}{(4 + 3j) \cdot (4 - 3j)} = \frac{8 - 26j - 15}{16 + 9} = \frac{-7 - 26j}{25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -0{,}28 - 1{,}04j$$

## B. Exponentialform

Addition und Subtraktion sind nicht ausführbar:
d.h. zuerst in die arithmetische Form überführen

Multiplikation:

$$z_1 = r_1 \cdot e^{jj_1} \qquad z_2 = r_2 \cdot e^{jj_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{jj_1} \cdot r_2 \cdot e^{jj_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(j_1 + j_2)}$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{jj_1}}{r_2 \cdot e^{jj_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(j_1 - j_2)}$$

## C. Goniometrische Form

Auch hier sind Addition und Subtraktion nicht ausführbar

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos j_1 + j \sin j_1) \qquad z_2 = r_2 \cdot (\cos j_2 + j \sin j_2)$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos j_1 + j \sin j_1) \cdot r_2 \cdot (\cos j_2 + j \sin j_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos j_1 \cdot \cos j_2 + j \cos j_1 \cdot \sin j_2 +$$

$$+ j \sin j_1 \cdot \cos j_2 + j^2 \sin j_1 \cdot \sin j_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos j_1 \cdot \cos j_2 - \sin j_1 \cdot \sin j_2 +$$

$$+ j(\sin j_1 \cdot \cos j_2 + \cos j_1 \cdot \sin j_2))$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\cos(j_1 + j_2) + j\left(\sin\left(j_1 + j_2\right)\right)\right)}$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos j_1 + j \sin j_1)}{r_2 \cdot (\cos j_2 + j \sin j_2)} =$$

$$= \frac{r_1 \cdot (\cos j_1 + j \sin j_1) \cdot (\cos j_2 - j \sin j_2)}{r_2 \cdot (\cos j_2 + j \sin j_2) \cdot (\cos j_2 - j \sin j_2)} =$$

$$= \frac{r_1 \cdot (\cos j_1 \cdot \cos j_2 - j \cos j_1 \cdot \sin j_2 +}{r_2 \cdot (\cos^2 j_2 + \sin^2 j_2)}$$

$$\frac{+ j \sin j_1 \cdot \cos j_2 - j^2 \sin j_1 \sin j_2)}{1} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos j_1 \cdot \cos j_2 + \sin j_1 \cdot \sin j_2 +$$

$$+ j(\sin j_1 \cdot \cos j_2 - \cos j_1 \cdot \sin j_2))$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(j_1 - j_2) + j \sin(j_1 - j_2)\right)}$$

Beispiel:

$$z_1 = 4 \cdot e^{j\frac{5 \cdot p}{3}} \qquad z_2 = 2 \cdot e^{j\frac{p}{6}}$$

$$z_1 + z_2 = 2 + \sqrt{3} + j\left(1 - 2\sqrt{3}\right)$$

$$z_1 - z_2 = 2 - \sqrt{3} - j\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot e^{j \cdot \frac{11}{6} p}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{3}{2} p}$$

Beispiel:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3} j \qquad z_2 = 3 \cdot e^{j \frac{7}{6} p}$$

$$z_1 + z_2 = \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) j$$

$$z_1 - z_2 = \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) j$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 e^{j \frac{3}{2} p}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{j \frac{7}{6} p}$$

Beispiel: Konjugiert komplexe Zahlen

$$z = a + bj$$

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2bj$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + j\frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - j\frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

## 6.4 Potenzieren

<u>Einführung:</u> Berechnet man die ersten Potenzen von $j$

$j^1 =$ $\boxed{j^2 = -1}$ Def.

$j^2 =$

$j^3 =$

$j^4 =$

$j^5 =$

$j^6 =$

$j^7 =$

$j^8 =$

$j^9 =$

Binomische Formel für $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

<u>A. Arithmetische Form</u>

Binomische Formel für komplexe Zahlen

$$\boxed{(a+bj)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \cdot j^k}$$

wobei die Potenzen von $j$ durch die entsprechenden Werte

$j$ , $-1$ , $-j$ , $+1$

zu ersetzen sind.

Beispiel:

a) $(2+3j)^4 = -119 - 120j$

b) $(1-\sqrt{3}j)^5 = 16 + 16\sqrt{3}j$

## B. Goniometrische und Exponentialform

$$\boxed{z^n = \left(r \cdot e^{jj}\right)^n = r^n \cdot e^{jnj}}$$

$$z^n = [r \cdot (\cos j + j \sin j)]^n$$

$$\boxed{z^n = r^n \cdot \left(\cos(nj) + j \sin(nj)\right)}$$

Lehrsatz von MOIVRE

Er gilt für beliebige reelle Exponenten.

Beispiel:

$$\left[3(\cos 20° + j \sin 20°)\right]^4 = 3^4 (\cos(4 \cdot 20°) + j \sin(4 \cdot 20°))$$

$$= 81 \cdot (\cos 80° + j \sin 80°)$$

Beispiel:

$$\left[\frac{2}{3} e^{j\frac{5}{4}p}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot e^{\left(j\frac{5}{4}p\right)3} = \frac{8}{27} e^{j\frac{15}{4}p} = \frac{8}{27} e^{j \cdot \left(\frac{15}{4}p - 4p\right)}$$

$$= \frac{8}{27} e^{-j\frac{p}{4}}$$

Beispiel:

$\left(1-\sqrt{3}j\right)^5$ ist mit Hilfe des MOIVREschen Lehrsatzes zu berechnen

$\left(1-\sqrt{3}j\right)^5$ muß zuerst in goniometrische oder Exponentialform umgewandelt werden

## 6.5 Radizieren von komplexen Zahlen

Wurzelziehen

Das Radizieren von komplexen Zahlen ist nur möglich, wenn diese in goniometrischer bzw. Exponentialform gegeben sind. Es wird der Lehrsatz von MOIVRE angewendet.

$$z^n = r \cdot e^{jj}$$

$$z = \left[r \cdot e^{jj}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{z = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{j\left(\frac{j}{n} + \frac{2kp}{n}\right)}}$$

oder

$$z^n = r(\cos j + j \sin j)$$

$$z = \left[r(\cos j + j \sin j)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{z = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{j}{n} + \frac{2kp}{n}\right) + j \sin\left(\frac{j}{n} + \frac{2kp}{n}\right)\right)}$$

Beispiel:

$$z^3 = -2 + 2j \qquad \text{Berechne } z$$

$$z = \sqrt[3]{-2 + 2j}$$

Zuerst muß -2 + 2*j* in goniometrische Form umgewandelt werden.

Beispiel:

Wie lauten die Lösungen der Gleichung

$$z^6 + 64 = 0$$

$$z = \sqrt[6]{-64}$$

Man kann den MOIVREschen Lehrsatz anwenden. Dafür wird die rechte Seite der Gleichung in die Exponentialform umgewandelt.

## 6.6 Logarithmieren von komplexen Zahlen

Beim Logarithmieren von komplexen Zahlen geht man von der Exponentialform

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

aus.

$$\ln z = \ln\left(r \cdot e^{j\varphi}\right)$$

$$\ln z = \ln r + \ln e^{j\varphi}$$

$$\boxed{\ln z = \ln r + j\varphi} \qquad \text{Hauptwert von } \ln z$$

Da $\varphi$ periodisch mit der Periode $2\pi$ ist,

$$e^{j\varphi} = e^{j(\varphi + 2\pi)}$$

ist der Logarithmus einer komplexen Zahl nicht eindeutig bestimmt. Er besitzt unendlich viele Werte.

$$\boxed{\ln z = \ln r + j(\varphi + 2k\pi)} \qquad k = \pm\, 0,1,2,...$$

Es reicht in der Regel der Hauptwert.

Beispiel:

$$z = 4(\cos 30° + j \sin 30°)$$

$$z = 2 - 3j$$

Bilde den Logarithmus der komplexen Zahl $z$.

$$\ln z = 1{,}28247 + 5{,}30039\,j$$