7 Lineare Algebra

7.1 Matrizen

$$A=\left(\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1k} & \cdot & \cdot & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2k} & \cdot & \cdot & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & a_{ik} & \cdot & \cdot & a_{in}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mk} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow\ i\text{-te Zeile}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

m Zeilen $\uparrow$
n Spalten k-te Spalte

a_{ik}: Matrixelement
i = 1,2,...,m
k = 1,2,...,n

i: Zeilenindex

k: Spaltenindex

m: Anzahl der Zeilen

n: Anzahl der Spalten

Anmerkungen

1. Eine Matrix ist ein geordnetes Zahlenschema und besitzt daher keinen Wert

2. Schreibweisen für eine Matrix:

$$A, \quad A_{(m,n)}, \quad (a_{ik}), \quad (a_{ik})_{(m,n)}$$

3. Der Platz, den ein Matrixelement a_{ik} innerhalb der Matrix A einnimmt, ist durch die beiden Indizes i und k eindeutig festgelegt.

4. Sonderfall $m = n$
   Die Matrix wird als n - reihige, quadratische Matrix bezeichnet.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2 Zeilen	$a_{11} = 3$	$a_{12} = 2$	$a_{13} = 7$	$a_{14} = 0$
4 Spalten	$a_{21} = -2$	$a_{22} = 6$	$a_{23} = 0$	$a_{24} = 5$

Spezielle Matrizen

Nullmatrix 0

Spaltenmatrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektor

$$A_{(m,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Zeilenmatrix

$$A_{(1,n)} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

7.1.1 Transponierte einer Matrix

Man erhält die Transponierte A^T der Matrix A, wenn in einer Matrix A Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden.

1. $a_{ik}^T = a_{ki}$ für alle i und k

2. Ist A vom Typ (m,n) so ist A^T vom Typ (n,m)

3. 2 - maliges Transponieren führt zur Ausgangsmatrix $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

7.1.2 Quadratische Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nebendiagonale Hauptdiagonale

Hauptdiagonale: von links oben nach rechts unten

Nebendiagonale: von rechts oben nach links unten

Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix: Sonderfall der Diagonalmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix:

Alle Elemente liegen unter - oder oberhalb der Hauptdiagonalen

untere Dreiecksmatrix obere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix:

$$a_{ik} = a_{ki}$$

spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

7.1.3 Gleichheit von Matrizen

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{ik} = b_{ik}$$

7.1.4 Rechenoperationen von Matrizen

<u>Addition</u> / <u>Subtraktion</u>

$$A = \left(a_{ik}\right) \qquad \text{und} \qquad B = \left(b_{ik}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &C = A + B = (c_{ik}) \\ &c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \end{aligned}}$$

Summe

$$\boxed{\begin{aligned} &D = A - B = (d_{ik}) \\ &d_{ik} = a_{ik} - b_{ik} \end{aligned}}$$

Differenz

<u>Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar</u>

$$l \cdot A = l \cdot (a_{ik}) = (l \cdot a_{ik})$$

Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{array}{ccc} A_{(2,3)} \cdot B_{(3,4)} = C_{(2,4)} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Zeilenzahl} \quad \text{Spaltenzahl} \end{array}$$

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$$

$C = A \cdot B$	ist nur möglich, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt

$$\begin{pmatrix} (1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) & (1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) & (1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0) & (1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1) \\ (0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1) & (0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)) & (0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0) & (0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 16 & -7 & 5 & 23 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Das Matrizenelement c_{ik} des Matrizenproduktes $A \cdot B$ ist das Produkt aus dem
i - ten Zeilenvektor von A und
k - ten Spaltenvektor von B

$$C_{13} = 5$$

1. Zeilenvektor von A $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. Spaltenvektor von B $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C_{13} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 5$$

<u>Rechengesetze</u>

Assoziativgesetz:	$A(BC)$	=	$(AB)C$
Distributivgesetze:	$A(B+C)$	=	$AB+BC$
	$(A+B)C$	=	$AC+BC$
Weitere Gesetze:	$(AB)^T$	=	$B^T A^T$
	AE	=	$EA = A$

7.2 Determinanten

<u>2-reihige, quadratische Matrix</u>

<u>Def.:</u> Eine Determinante einer 2-reihigen, quadratischen Matrix

$A = (a_{ik})$ ist die Zahl

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Hauptdiagonale
Nebendiagonale

det A, $|A|$, $|a_{ik}|$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) - (-10) \cdot 3 = 0$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

<u>Dreireihige Determinante</u>

Z.B. ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen
(also 3 Unbekannten)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

muß auf seine Lösbarkeit hin untersucht werden.
Dazu ist die Berechnung der Determinanten notwendig.

Def.: Determinante einer 3-reihigen, quadratischen Matrix $A = (a_{ik})$ ist die Zahl

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ +a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

<u>Sarrus - Regel</u>

(-) (-) (-)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

\+ \+ \+

Nur für 3-reihige Determinanten

7.2.1 Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten (LAPLACEscher Entwicklungssatz)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante D_{11}

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 7 - 1 \cdot 3 = -17$$

algebraisches Komplement:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^2 \cdot (-17) = -17$$

Unterdeterminante D_{23}

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 4 = 1$$

algebraisches Komplement A_{23}

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1$$

Eine 3-reihige Determinante hat insgesamt <u>neun</u> zweireihige Unterdeterminanten:

$$\begin{array}{ccc} D_{11}, & D_{12}, & D_{13} \\ D_{21}, & D_{22}, & D_{23} \\ D_{31}, & D_{32}, & D_{33} \end{array}$$

Die 3-reihige Determinante läßt sich in Form:

$$D = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$$

darstellen. Dabei bedeuten:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Oder unterVerwendung der algebraischen Komplemente

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} \qquad \begin{aligned} A_{11} &= D_{11} \\ A_{12} &= -D_{12} \\ A_{13} &= D_{13} \end{aligned}$$

$$\boxed{D = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} A_{1k}}$$

Eine 3-reihige Determinante *D* läßt sich aber genauso nach den Elementen der 2. oder 3. Zeile entwickeln.
Die “Entwicklungsformel“ lautet:

$$\boxed{D = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} A_{2k}}$$

Auch die Entwicklung nach den Elementen der 1., 2. oder 3. Spalte ist möglich.

$$\boxed{D = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i1}}$$

LAPLACEscher Entwicklungssatz:

Entwicklung nach der *i*-ten Zeile: $\boxed{D = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_{ik} \quad i = 1,2,3}$

Entwicklung nach der *k*-ten Spalte: $\boxed{D = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} A_{ik} \quad k = 1,2,3}$

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

7.2.2 Determinanten höherer Ordnung

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Das Ziel heißt:</u> die Determinante zu berechnen.

<u>Lösung:</u> Durch Entwicklung nach den Elementen einer Zeile oder Spalte läßt sich die Ordnung einer Determinante reduzieren

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \det A$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} a_{1k} A_{1k}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{11} = 2} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{12} = -6} +$$

$$+(-3) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{13} = -4} - 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{14} = 4} =$$

$$= 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-4) - 4 \cdot 4 =$$

$$= 10$$

Die Berechnung der 3-reihigen Unterdeterminanten

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2 \\ D_{12} &= -6 \\ D_{13} &= -4 \\ D_{14} &= 4 \end{aligned}$$

erfolgte dabei nach der Regel von Sarrus.

!! Nachrechnen !!

Beispiel:

$$\underline{\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$\underline{= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}$$

$D_{11} = 123$ $\qquad$ $D_{13} = 57$ $\qquad$ $D_{14} = 9$

$$\underline{= 1 \cdot 123 - 5 \cdot 57 - 10 \cdot 9}$$

$$\underline{= -252}$$

Allgemein legen wir für eine Determinante n-ter Ordnung die folgende “Entwicklungsvorschrift“ fest:

$$\underline{D = \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}}$$

nach den Elementen der ersten Zeile.

Dabei ist $\quad A_{1k} = (-1)^{1+k} D_{1k} \quad$ (n-1)-reihige Unterdeterminante D_{1k}

7.2.3 LAPLACEscher Entwicklungssatz

Eine *n*-reihige Determinante läßt sich nach den Elementen einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

Entwicklung nach der *i*-ten Zeile:

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Entwicklung nach der *k*-ten Spalte:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

D_{ik}: (*n*-1)-reihige Unterdeterminante

7.2.4 Determinantengesetze

Rechenregeln für *n*-reihige Determinanten

Regel 1:

Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* werden.

Regel 2:

Beim *Vertauschen* zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr *Vorzeichen*.

Regel 3:

Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit einem reellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Regel 4:

Eine Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5:

Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen *gemeinsamen* Faktor λ , so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

Regel 6:

Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. *Alle* Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null*.
2. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind *gleich*.
3. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind zueinander *proportional*.
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist als *Linearkombination* der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar.

Regel 7:

Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. Spalte) addiert.

Regel 8: Multiplikationstheorem für Determinanten

Für zwei *n*-reihige Matrizen *A* und *B* gilt stets

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

d.h. die Determinante eines *Matrizenproduktes* $A \cdot B$ ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren *A* und *B*.

Regel 9:

Die Determinante einer *n*-reihigen *Dreiecksmatrix A* besitzt den Wert

$$\det A = a_{11} a_{22} ... a_{nn}$$

d.h. die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Beispiel:

Bestimme die Determinanten von folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & 20 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Alle Elemente der 2. Zeile sind 0
Regel 6.1

$\det B = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Zeile 1 und Zeile 2 sind zueinander proportional

$\det C = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Spalte 1 und Spalte 3 sind gleich
Regel 6.2

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne die Determinante des Matrizenproduktes $A \cdot B$

Regel 8

$$\det(A \cdot B) \quad = (\det A) \cdot (\det B)$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}}_{=21} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=39} = 21 \cdot 39 = 819$$

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

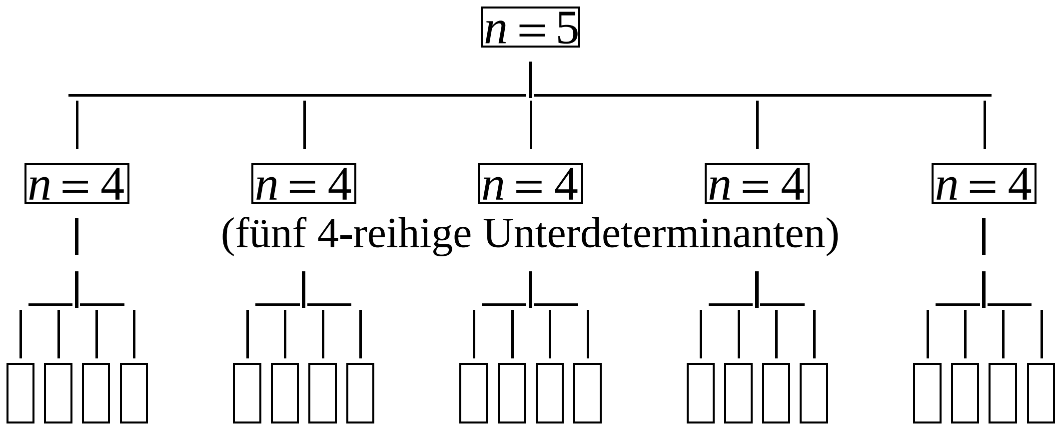
Nach Regel 9 ist (für eine Dreiecksmatrix)

$$\det A = 4 \cdot 1 \cdot 12 \cdot (-3) = -144$$

7.2.5 Praktische Berechnung einer *n*-reihigen Determinante

Entwickelt man eine 5-reihige Determinante nach LAPLACE, so erhält man zunächst <u>fünf</u> 4-reihige Unterdeterminanten und aus jeder dieser 4-reihigen Determinanten durch abermalige Entwicklung <u>vier</u> 3-reihige Unterdeterminanten.

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & o & o & o & o \\ x & o & o & o & o \\ x & o & o & o & o \\ x & o & o & o & o \end{pmatrix}$$



Entwickelt man eine 6-reihige Determinante nach dem gleichen Schema, so erhält man nach drei Entwicklungsschritten bereits 120 3-reihige Determinanten.

Elementare Umformungen einer Determinante

Die folgenden *elementaren Umformungen* verändern den Wert einer Determinante *nicht*:

1. Ein den Elementen einer Zeile (oder Spalte) *gemeinsamer* Faktor darf *vor* die Determinante gezogen werden.

2. Zu einer Zeile (oder Spalte) darf ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert werden.

3. Zwei Zeilen (oder Spalten) dürfen *vertauscht* werden, wenn gleichzeitg das Vorzeichen der Determinante *geändert* wird.

Praktische Berechnung einer n-reihigen Determinante (n>3)

Die Berechnung einer n-reihigen Determinante (n>3) erfolgt zweckmäßigerweise nach folgendem Schema:

1. Mit Hilfe *elementarer Umformungen* werden zunächst die Elemente einer Zeile (oder Spalte) bis auf eines zu *Null* gemacht.

2. Dann wird die n-reihige Determinante nach den Elementen dieser Zeile (oder Spalte) *entwickelt*. Man erhält genau *eine* (n-1)-reihige Unterdeterminante.

3. Das unter 1. und 2. beschriebene Verfahren wird auf die (n-1)-reihige Unterdeterminante angewandt und führt zu einer einzigen (n-2)-reihigen Unterdeterminante. Durch *wiederholte Reduzierung* gelangt man schließlich zu einer einzigen *3-reihigen* Determinante, deren Wert nach der *Regel von Sarrus* zu berechnen ist.

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Das Ziel ist es die Elemente einer Zeile (oder Spalte) bis auf eines zu Null zu machen.

1. Zunächst wird die 4. Zeile mit 2 multipliziert

2. Die Zeile

$$2 \quad -2 \quad 0 \quad 0$$

wird zur 1. Zeile addiert

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=7} = 4 \cdot 7 = 28$$

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Wir versuchen die erste Zeile zu Null zu bringen.

1. 2. Spalte multipliziert mit 2 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und

2. addiert zur 4. Spalte ergibt

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Zur 2. Spalte wird die erste addiert:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Von der 4. Zeile wird die erste subtrahiert:

$$D = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 26$$

7.2.6 Ergänzungen

7.2.6.1 Reguläre / Singuläre Matrix

A ist Reguläre Matrix $\Rightarrow$	$\det A \neq 0$	Gilt nur für quadratische Matrix
A ist Singuläre Matrix $\Rightarrow$	$\det A = 0$	

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist A regulär?

$$\det A = 21 \neq 0$$

$\Rightarrow$ regulär

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det B = (-4) \cdot (-3) - 6 \cdot 2 = 0$$

$\Rightarrow$ singulär

7.2.6.2 Inverse Matrix

$$A \cdot X = E$$

A	n-reihige quadratische Matrix
X	inverse Matrix
E	Einheitsmatrix

1. Eine quadratische Matrix besitzt genau eine Inverse

2. Besitzt eine Matrix A eine inverse Matrix A^{-1}, so heißt A invertierbar (umkehrbar)

   A^{-1} - Kehrmatrix, Umkehrmatrix, Inverse

3. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

4. Eine Matrix A ist invertierbar, wenn

   - A eine quadratische Matrix ist

   - det $A \neq 0$; A eine reguläre Matrix ist

A_{adj} - adjungierte Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdot & \cdot & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}$$

mit

$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$; D_{ik} (n-1)-reihige Unterdeterminante

Man beachte die Reihenfolge der Indizes. In der *i*-ten Zeile und *k*-ten Spalte von A^{-1} befindet sich das algebraische Komplement A_{ki} und nicht etwa A_{ik} (Vertauschung der beiden Indizes)

$$A_{adj} = (A_{ik})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdot & \cdot & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{adj}}$$

Beispiel:

Bilde die Inverse zu A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. sie ist quadratisch

2. $\det A = -1 \neq 0$ $\Rightarrow$ sie ist regulär

Mit 1. und 2. $\Rightarrow$ A ist invertierbar (umkehrbar)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{adj.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}$ $\quad$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21}$ $\quad$ $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31}$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12}$ $\quad$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$ $\quad$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot D_{32}$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot D_{13}$ $\quad$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23}$ $\quad$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot D_{33}$

D_{ik} - Unterdeterminanten

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \qquad D_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad D_{31} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$D_{12} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad D_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \qquad D_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

$$D_{13} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad D_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad D_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

$$A_{11} = +D_{11} = -1 \qquad A_{21} = -D_{21} = -1 \qquad A_{31} = +D_{31} = 4$$

$$A_{12} = -D_{12} = -2 \qquad A_{22} = +D_{22} = -2 \qquad A_{32} = -D_{32} = 7$$

$$A_{13} = +D_{13} = 0 \qquad A_{23} = -D_{23} = -1 \qquad A_{33} = +D_{33} = 4$$

Die Inverse Matrix zu A lautet:

$$A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Zur Probe $\quad A \cdot A^{-1} = E$

	$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$		FALK-Schema zur Multiplikation der Matrizen
$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		

7.2.6.3 Rang einer Matrix

- Es sei eine Matrix

$$A_{(m,n)}$$

vorgegeben.

- Man bilde alle möglichen Unterdeterminanten dieser Matrix, betrachte aber nur diejenigen unter ihnen, die einen von Null verschiedenen Wert besitzen.

- Unter ihnen gibt es dann mindestens eine Unterdeterminante von *A*, die im Vergleich zu allen übrigen die höchste Ordnung besitzt.

- Die Ordnung *r* dieser Unterdeterminante von *A* heißt dann der Rang *r* der Matrix *A.*

Wir definieren daher:

Unter dem Rang einer Matrix *A* vom Typ (*m,n*) wird die höchste Ordnung *r* aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von *A* verstanden.

$$Rg(A) = r$$

Anmerkungen:

1. r ist höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen m und n:

$$r \leq \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} m \leq n \\ n < m \end{matrix}$$

Rangbestimmung einer Matrix unter Verwendung von Unterdeterminanten

Der Rang r einer (m,n)-Matrix A kann wie folgt bestimmt werden (für $m \leq n$):

1. Zunächst werden die *m-reihigen* Unterdeterminanten von A berechnet. Es ist $r = m$, wenn es unter ihnen wenigstens *eine* von Null verschiedene Determinante gibt.
2. Verschwinden aber *sämtliche* m-reihigen Unterdeterminanten von A, so ist *r höchstens gleich m* - 1. Es ist daher zu prüfen, ob es wenigstens *eine* von Null verschiedene (m-1)*-reihige* Unterdeterminante von A gibt. Ist dies der Fall, so ist $r = m - 1$. Andernfalls ist r höchstens gleich m - 2. Das beschriebene Verfahren wird dann solange fortgesetzt, bis man auf eine von Null *verschiedene* Unterdeterminante von A stößt. Die *Ordnung* r dieser Determinante ist dann der gesuchte *Rang* der Matrix A.

2. Für eine n-reihige quadratische Matrix A ist stets $r \leq n$. Insbesondere gilt für eine reguläre bzw. singuläre Matrix:

Reguläre Matrix A: $\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = n$

Singuläre Matrix A: $\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad r < n$

Beispiel: Rang der Matrix A

$$A_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Rang r kann höchstens 3 sein:

$$\begin{array}{ccc} m = 3 & < & n = 4 \\ & \Downarrow & \\ r & \leq & m = 3 \end{array}$$

Wir prüfen zuerst, ob es wenigstens eine von Null verschiedene 3-reihige Unterdeterminante von A gibt.

Neuer Begriff:

Bildung der Unterdeterminante von nichtquadratischen Matrizen

Durch streichen einer der 4 Spalten läßt sich eine 3-reihige Matrize gewinnen, deren Determinanten wiederum als 3-reihige Unterdeterminanten von A bezeichnet werden.

Es gibt vier 3-reihige Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Davon die Determinanten berechnet, ergibt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es gibt also keine von Null verschiedene 3-reihige Unterdeterminante von A.

Daher ist $r < 3$.

Der Matrizenrang kann höchstens gleich 2 sein, d.h. $r \leq 2$

Wir prüfen jetzt, ob es wenigstens eine von Null verschiedene 2-reihige Unterdeterminante von A gibt.

Durch streichen der ersten Zeile und der 3. und 4. Spalte in A erhalten wir die folgende nichtverschwindende 2-reihige Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = -4 + 1 = -3$$

Die Matrix A besitzt somit den Rang $r = 2$

7.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit

m Gleichungen

und

n Unbekannten

vom allgemeinen Typ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

läßt sich unter Verwendung von Matrizen in einer besonders übersichtlichen Form darstellen.

Die Koeffizienten a_{ik} werden zu einer Koeffizientenmatrix A ; die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu einem Spaltenfaktor x und die absoluten Glieder $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zu einem Spaltenvektor zusammengefaßt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Lösungsvektor bezeichnet}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = c$$

Unter Verwendung des FALK-Schemas zur Multiplikation von Matrizen läßt sich nämlich leicht zeigen, daß das Matrizenprodukt

$$A \cdot x$$

zu einem Spaltenvektor C führt.

$$\begin{array}{c|c}
 & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \\
\hline
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} & A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

7.3.1 Lineares quadratisches Gleichungssystem

Für $m = n$ erhalten wir den in den Anwendungen besonders häufigen und wichtigen Sonderfall eines quadratischen linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten.

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n
\end{array}$$

oder $$A \cdot x = C$$

Die Koeffizientenmatrix A ist dabei quadratisch,
die <u>erweiterte Koeffizientenmatrix</u> $(A|c)$ vom Typ $(n, n + 1)$.

$$(A|c) = \left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & c_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & c_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} & c_n
\end{array}\right)$$

Inhomogenes lineares (n,n)-System

$$A \cdot x = c$$

Homogenes lineares (n,n)-System

$$A \cdot x = 0$$

Kriterien für die Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n,n)-Systems $A \cdot x = c$

Inhomogenes (n,n)-System

$A \cdot x = c$

↓ det $A \neq 0$ (*A* ist *regulär*) ↓ Genau *eine* Lösung

↓ det $A = 0$ (*A* ist *singulär*)

↓ Rg(A) = Rg($A|c$) = $r < n$ — *Unendlich* viele Lösungen

↓ Rg(A) ≠ Rg($A|c$) — *Keine* Lösung

Kriterien für die Lösbarkeit eines homogenen linearen (n,n)-Systems $A \cdot x = 0$

Homogenes (n,n)-System

$A \cdot x = 0$

↓ det $A \neq 0$ (*A* ist *regulär*) ↓ Genau *eine* Lösung: $x = 0$ (*triviale* Lösung)

↓ det $A = 0$ (*A* ist *singulär*) ↓ *Unendlich* viele Lösungen (darunter die *triviale* Lösung)

7.3.2 CRAMERsche Regel

Zur Lösung eines inhomogenen linearen (n,n)-Systems $A \cdot x = c$

Nach dem Kapitel 7.3.1 besitzt ein inhomogenes Gleichungssystem $A \cdot x = c$ genau eine Lösung, wenn die Koeffizientenmatrix A regulär ist.

$$A \cdot x = c$$

Multiplizieren $A \cdot x = c$ von links mit A^{-1} (inverse)

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot c$$

Die linke Seite: $A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$

Das ergibt:

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot c}$$

Der Lösungsvektor x ist somit das Matrizenprodukt aus der zu A inversen Matrix A^{-1} und dem Spaltenvektor c.

Multiplikation $A_{nn} \cdot c_{n1} = A_{n1}$

$$x = A^{-1} \cdot c = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdot & \cdot & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cdot A_{11} + c_2 \cdot A_{21} + \ldots\ldots + c_n \cdot A_{n1} \\ c_1 \cdot A_{12} + c_2 \cdot A_{22} + \ldots\ldots + c_n \cdot A_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_1 \cdot A_{1n} + c_2 \cdot A_{2n} + \ldots\ldots + c_n \cdot A_{nn} \end{pmatrix}$$

oder in komponentenweiser Darstellung

$$x_1 = \frac{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \ldots\ldots + c_n A_{n1}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{c_1 A_{12} + c_2 A_{22} + \ldots\ldots + c_n A_{n2}}{\det A}$$

.
.
.

$$x_n = \frac{c_1 A_{1n} + c_2 A_{2n} + \ldots\ldots + c_n A_{nn}}{\det A}$$

Im Nenner steht die Koeffizientendeterminante $D = \det A$

Auch der jeweilige Zähler bei x_1, x_2, ..., x_n läßt sich durch eine Determinante darstellen.
Ersetzen wir in der Koeffizientendeterminante D die 1. Spalte durch die Absolutglieder c_1, c_2, ..., c_n des Systems, so erhalten wir die n-reihige Determinante D_1.

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Um D_1 zu berechnen, führt man die Entwicklung von D_1 nach Elementen der 1. Spalte durch:

$$D_1 = c_1 \cdot A_{11} + c_2 \cdot A_{21} + c_3 \cdot A_{31} + \ldots\ldots + c_n \cdot A_{n1}$$

Damit ist x_1 gleich

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

Für x_2 wird die 2. Spalte der Koeffizientendeterminante D durch die Absolutglieder c_1, c_2, ..., c_n des Systems ersetzt.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & c_n & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D_2 entsteht durch die Entwicklung von D_2 nach den Elementen der 2. Spalte:

$$D_2 = c_1 \cdot A_{12} + c_2 \cdot A_{22} + c_3 \cdot A_{32} + ... + c_n \cdot A_{n2}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

Entsprechend erhalten wir die übrigen Unbekannten x_3, x_4, ..., x_n

$$x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$x_4 = \frac{D_4}{D}$$

.

.

.

$$x_n = \frac{D_n}{D}$$

REGEL:

1. Nur, wenn A regulär ist $D = \det A \neq 0$

Beispiel:

Löse das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$$

A ist regulär, daher besitzt das System genau eine Lösung

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad D_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c\downarrow & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = 155$$

$$x_1 = \frac{155}{31} = 5$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad D_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & c\downarrow & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = -62$$

$$x_2 = \frac{-62}{31} = -2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad D_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & c\downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 0$$

$$x_3 = \frac{0}{31} = 0$$