8 Unendliche Reihen, Potenzreihen, Taylor-Reihen, Fourier-Reihen

8.1 Unendliche Reihen

8.1.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Im Kap. 3.4.1 wurden Zahlenfolgen und ihre Konvergenz behandelt.

Hier betrachten wir folgende unendliche geometrische Zahlenfolge

$$\begin{array}{llllll} a_n = 1 \; ; & 0{,}2 \; ; & 0{,}2^2 \; ; & 0{,}2^3 \; ; & ..... \\ n = 1 & n = 2 & n = 3 & n = 4 & \end{array}$$

Sie kann nach einem Bildungsgesetz anders geschrieben werden:

$$\boxed{a_n = 0{,}2^{n-1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Jetzt bilden wir aus den Gliedern dieser Folge Partialsummen, indem wir Glied für Glied aufsummieren.
Die ersten 4 Partialsummen lauten:

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & = 1 = 1 \\ S_2 = a_1 + a_2 & = 1 + 0{,}2 = 1{,}2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 & = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 = 1{,}24 \\ S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 = 1{,}248 \\ . & \\ . & \\ . & \end{array}$$

Wir fassen sie zu einer neuen Folge zusammen

Partialsummenfolge

$$S_n = S_1, \;\; S_2, \;\; S_3, \;\; S_4, \;\; .....$$

Sie kann wiederum mit dem Bildungsgesetz geschrieben werden zu:

$$S_n = 1 + 0{,}2^1 + 0{,}2^2 + 0{,}2^3 + \ldots + 0{,}2^{n-1}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2^{k-1}}$$

S_n ist dabei die n-te Partialsumme, d.h. die Summe der ersten n Glieder der Zahlenfolge a_n.

Für die Partialsumme S_n führen wir die neue Bezeichnung

<u>Unendliche Reihe</u>

ein und schreiben dafür symbolisch

$$1 + 0{,}2^1 + 0{,}2^2 + \ldots + 0{,}2^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}2^{n-1}$$

Die unendliche Reihe kann demnach als formale Summe der Glieder einer Zahlenfolge a_n aufgefaßt werden.

Man bildet einen <u>SUMMENWERT</u> einer unendlichen Reihe.

Bei einer e n d l i c h e n Reihe wird diese durch Addition der endlich vielen Reihenglieder ermittelt.

Bei einer u n e n d l i c h e n Reihe bilden wir den Grenzwert der Partialsummenfolge S_n.

<u>Def.:</u> Die Folge S_n der Partialsummen einer Folge a_n heißt u n e n d l i c h e Reihe.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Beispiel: Unendliche Reihenfolge n

$$a_n = n$$

$$a_n = 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ ....,\ \ n \qquad (n = \mathrm{N})$$

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3$$
.
.
$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$
.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ... + n + ...$$

Beispiel:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = 1,\ \ \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{3},\ \ .....,\ \ \frac{1}{n},\ \ ....$$

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
.
.
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$
.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Beispiel: Geometrische Folge (auch unendliche Reihe)

$$a_n = aq^{n-1} = \underset{n=1}{a}, \;\; \underset{n=2}{aq}, \;\; \underset{n=3}{aq^2}, \;\; \ldots\ldots, \;\; aq^{n-1}, \;\; \ldots$$

erhalten wir durch Partialsummenbildung die sogenannte
geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

8.1.2 Konvergenz

Eine unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert *S* besitzt:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

Die Zahl *S* wird als Summenwert der unendlichen Reihe bezeichnet.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Besitzt die Partialsumme S_n jedoch keinen Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe divergent.

Beispiel:

Zeige, daß die unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ für

und für
$$|q| < 1 \qquad \text{konvergiert}$$
$$|q| \geq 1 \qquad \text{divergiert}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + ...+ q^{n-1} + ...$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ...+ q^{n-1}$$

Man bildet die Differenz $\left(S_n - q \cdot S_n\right)$

$$S_n = \ 1 + \ q + q^2 + q^3 + ...+ q^{n-2} + q^{n-1}$$

$$- \quad q \cdot S_n = \qquad q + q^2 + q^3 + ...+ q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = \ 1 - q^n$$

$$S_n(1-q) = 1 - q^n \qquad\qquad S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$$

Jetzt bilden wir den Grenzwert der Folge der Partialsummen S_n

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

da in diesem Fall $\left(|q| < 1\right) \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Für $|q| > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$

Zahlenbeispiele:

$$q = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{3}{2}$$

$$q = +\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 2$$

$$q = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{2}{3}$$

8.1.3 Konvergenzkriterien

Konvergenzkriterien ermöglichen eine Entscheidung darüber, ob eine vorgegebene unendliche Zahlenreihe konvergiert oder divergiert.

Damit die unendliche Reihe konvergiert muß eine notwendige

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

und eine hinreichende Bedingung erfüllt sein.

Es gibt zwei in der Praxis besonders wichtige hinreichende Kriterien

A. Quotientenkriterium

B. LEIBNIZsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

8.1.3.1 Quotientenkriterium

Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$$

so ist die Reihe konvergent. $q > 1 \Rightarrow$ divergent

<u>Beispiel:</u> Zeige, daß $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ konvergiert.

$$a_n = \frac{1}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} =$$

8.1.3.2 LEIBNIZsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Alternierende Reihen sind Reihen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Eine solche Reihe ist in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - .....$$

mit $a_n > 0$

darstellbar. $(-1)^{n+1}$ ist ein <u>Vorzeichenfaktor</u>

> Eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn
>
> 1. $a_1 > a_2 > a_3 > ..... > a_n > a_{n+1} > ....$
>
> 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>Bemerkung:</u> Eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn die Beträge der Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden.

Beispiel:

1) Prüfe, ob die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$ konvergent ist.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

3) alternierende geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 1=1-1+1-1+-.....$$

$a_n=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$

und

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}1=1$

a_n ist keine monoton fallende Nullfolge

8.2 Potenzreihen

Def.:	Unter einer Potenzreihe $P(x)$ versteht man eine unendliche Reihe vom Typ $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots$ 1. $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten der Potenzreihe

<u>Beispiel:</u>

1) $$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x^1 + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots$$

2) $$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

8.2.1 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe

Es sei eine Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

vorgegeben.

Lt. Definition in Kap. 8.1.2 konvergiert eine Potenzreihe an einer Stelle x_1, wenn die Partialsummenfolge

$$\begin{aligned}
&P_0(x_1) = a_0\\
&P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1^{1}\\
&P_2(x_1) = a_0 + a_1 x_1^{1} + a_2 x_1^{2}\\
&.\\
&.\\
&.\\
&P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1^{1} + a_2 x_1^{2} + \ldots\ldots + a_n x_1^{n}
\end{aligned}$$

einem Grenzwert, dem sogenannten Summenwert $P(x_1)$ zustrebt.

Besitzt diese Folge jedoch keinen Wert, so ist die Potenzreihe an der Stelle x_1 divergent.

Def.:	Konvergenzbereich
	Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe läßt sich geometrisch wie folgt konstruieren

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibt es eine positive Zahl r, Konvergenzradius genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert überall im Intervall $|x| < r$
2. Die Potenzreihe divergiert dagegen für $|x| > r$
3. bei $|x| = r$ läßt sich jedoch keine allgemeingültige Aussage treffen

Berechnung des Konvergenzradius

Nach dem Konvergenzkriterium konvergiert eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn sie die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1$$

erfüllt.

Mit $b_n = a_n x^n$ und $b_{n+1} = a_{n+1} \cdot x^{n+1}$ erhält man:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x\right| < 1$$

Diese Ungleichung schreiben wir um:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x\right| \mathrel{\hat{=}} |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = r$$

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$ Konvergenzradius der Reihe

$$|x| < r$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für $|x| < r$

Beispiel: Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$$

Mit $a_n = 1$
$a_{n+1} = 1$

erhalten wir für den Konvergenzradius r dieser Reihe:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$
und divergiert für $|x| > 1$

2) Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

Wenn $r = \infty$, dann ist die Bedingung $|x| < r$ immer erfüllt.

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}$$

Die Reihe entwickelt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}=\frac{(x-1)^1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-+.....$$

Zuerst substituieren, um eine “bequemere“ Form zu erhalten

$$z=x-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^n}{n!}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-+.....$$

Mit $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

$$a_{n+1}=(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}}{(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}}\right|=|-|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=|-1|=1$$ falls 1 $|z|<1$

Für $|z|<-1$

$z\geq 0 \quad\Rightarrow\quad z<1$

$0\leq z<1$

$z<0 \quad\Rightarrow\quad -z<1$

$z>-1$

$-1<z<0$

$-1<z<1$

$-1<x-1<1$

$0<x<+2$

Eigenschaften der Potenzreihen:

1. Eine Potenzreihe kann als eine Funktion aufgefaßt werden:

$$x \qquad \rightarrow \qquad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

2. Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden.

3. Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich der Reihen gliedweise addiert und multipliziert werden.

8.3 TAYLOR-Reihen Sonderfall von Potenzreihen

Es ist grundsätzlich möglich eine vorgegebene Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln.

8.3.1 MAC LAURINsche Reihe

Unter bestimmten Voraussetzungen läßt sich eine Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe der Form:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots\ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

entwickeln.

Erklärung zur Herleitung

1. Die Entwicklung der Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe vom Typ

   $$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n$$

   ist grundsätzlich möglich und eindeutig.

2. Die Funktion $f(x)$ ist in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ beliebig oft differenzierbar und die Funktionswerte $f(0)$ und Ableitungswerte $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ... sind bekannt.

damit gilt für die Herleitung der Koeffizienten $a_0, \; a_1, \; \ldots.., \; a_n$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

.

.

.

An der Stelle $x = 0$ gilt dann:

$$f(0) =$$

$$f'(0) =$$

$$f''(0) =$$

$$f'''(0) =$$

$$f^{IV}(0) =$$

.

.

.

Daraus werden die Koeffizienten wie folgt berechnet:

$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

.

.

.

$$a_n =$$

Beispiel: e^x in Mac LAURINsche Reihe:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) =$$
$$f''(x) =$$
.

.

$$f^n(x) =$$

damit $f^n(0) = 1$, $n = 0, 1, ...$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Der Konvergenzradius wurde schon früher berechnet
$r = \infty$ d.h. die Reihe ist ständig konvergent.

Beispiel: e^{-x}

$$f(x) = e^{-x}$$
$$f'(x) =$$
$$f''(x) =$$
$$f'''(x) =$$
.

.

$$f^n(x) =$$

damit $f^n(0) = (-1)^n \cdot 1$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + ...$$

Beispiel: $f(x) = \sin x$

$f(x) = \sin x$	$f(0) =$
$f'(x) =$	$f'(0) =$
$f''(x) =$	$f''(0) =$
$f'''(x) =$	$f'''(0) =$
$f^{IV}(x) =$	$f^{IV}(0) =$

ab da wiederholen sich die Werte

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{0}{6!} \cdot x^6$$

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + -..... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Eine ungerade Zahl wird durch den Ausdruck

$\boxed{2n+1}$ $n = 0, 1, 2$

festgelegt: 1, 3, 5, 7, ... Minus bei jedem zweiten ungeraden n

Berechnung des Konvergenzradius r:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{mit} \quad a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+3)!}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}}{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)! \ \ (2n+2)(2n+3)}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+3) = \infty$$

daher konvergiert die Reihe beständig für alle $x \in \mathrm{R}$

Beispiel: $f(x) = \cos x$

1. Methode: Mac LAURINsche Entwicklung:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f(0) = \\
f'(x) = & f'(0) = \\
f''(x) = & f''(0) = \\
f'''(x) = & f'''(0) = \\
f^{IV}(x) = & f^{IV}(0) =
\end{array}
$$

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!} \cdot x^1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{0}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{0}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{6!} \cdot x^6$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - ..... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Eine gerade Zahl läßt sich durch den Ausdruck: $2n$ beschreiben. Minus bei jedem zweiten geraden n

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{mit} \qquad a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}, \qquad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+2)!}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}}{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+2)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (2n+1)(2n+2) = +\infty$$

2. Methode Durch gliedweise Differentiation der sin-Reihe

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - .....\right)'$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + ...$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Beispiel: Binomische Reihe $f(x) = (1 \pm x)^n$

Zuerst $f(x) = (1+x)^n$

$f(x) = (1+x)^n$ $\qquad$ $f(0) =$

$f'(x) =$ $\qquad$ $f'(0) =$

$f''(x) =$ $\qquad$ $f''(0) =$

$f'''(x) =$ $\qquad$ $f'''(0) =$

. .

. .

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot x^1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot x^3 + \ldots.. =$$

$$= 1 + \frac{n}{1} \cdot x^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots..$$

Die Koeffizienten dieser Reihe sind sog. Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1) \cdot \ldots.. \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{k!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot \ldots.. \cdot (n-k+1)}{k!}$$

z.B. $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{(8-3+1) \cdot (8-1) \cdot 8}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$

damit $(1-x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} \cdot x^3 + \ldots.. =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Berechnung des Konvergenzradius:

2 Fälle, wenn

1. $n \in \mathrm{N}$
2. $n \notin \mathrm{N}$

2. Fall: $n \notin \mathrm{N}$

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} =$$

$$a_k = \binom{n}{k}$$

$$a_{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n(n-2)(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}}{\dfrac{n(n-2)(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{n-k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{k}}{\frac{n}{k}-1}\right| = +1$$

Die Binomialreihe konvergiert

für $|x| < r \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{|x| < 1}}$

und im Falle $n > 0$ sogar $|x| \le 1$

1. Fall:

$$f(x) = (1-x)^n \qquad \text{statt } x \text{ setzen wir } (-x) \text{ ein}$$

$$(1-x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot (-x)^1 + \binom{n}{2} \cdot (-x)^2 + \binom{n}{3} \cdot (-x)^3 + \ldots\ldots =$$

$$= 1 - \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 - \binom{n}{3} \cdot x^3 + - \ldots\ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Wir fassen jetzt die Potenzreihenentwicklungen $(1+x)^n$ und $(1-x)^n$ zusammen.

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} \cdot x^2 \pm \binom{n}{3} \cdot x^3 + \binom{n}{4} \cdot x^4 \pm \ldots\ldots$$

Für $n = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 \pm x}$

$$\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}}$$

$f(x) = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad\qquad$ $f(0) =$

$f'(x) =$ $\qquad\qquad$ $f'(0) =$

$f''(x) =$ $\qquad\qquad$ $f''(0) =$

$f'''(x) =$ $\qquad\qquad$ $f'''(0) =$

$f^4(x) =$ $\qquad\qquad$ $f^4(0) =$

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{\frac{1}{2}}{1!} \cdot x^1 - \frac{\frac{1}{2 \cdot 2}}{2!} \cdot x^2 \pm \frac{\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2}}{3!} \cdot x^3 - \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}{4!} \cdot x^4 \pm \ldots$$

2) $\dfrac{\frac{1}{2\cdot 2}}{2!}=\dfrac{1}{2\cdot 2\cdot 1\cdot 2}=\dfrac{1}{2\cdot 4}$

3) $\dfrac{\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}}{1\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}$

4) $\dfrac{\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$

damit:

$$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}=1\pm\frac{1}{2}\cdot x^1-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot x^2\pm\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot x^4\pm....$$

<u>Beispiel:</u> $(1+x)^{-1}$

$f(x)=(1+x)^{-1}$	$f(0)=$
$f'(x)=$	$f'(0)=$
$f''(x)=$	$f''(0)=$
$f'''(x)=$	$f'''(0)=$
$f^4(x)=$	$f^4(0)=$

$$(1+x)^{-1}=1+\frac{-1}{1!}\cdot x+\frac{1\cdot 2}{2!}\cdot x^2+\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{3!}\cdot x^3+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4!}\cdot x^4+.....$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-+.....$$

<u>Beispiel:</u> $f(x)=(1-x)^{-1}$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+.....$$

8.3.2 TAYLORsche Reihe

Die Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f(x)$ um den Nullpunkt $x_0 = 0$ führte zur Mac LAURINschen Reihe von $f(x)$.

Grundsätzlich kann man eine Funktion $f(x)$ um eine beliebige Stelle x_0 entwickeln.

Diese Entwicklung heißt TAYLORsche Reihe.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots.. = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \end{aligned}}$$

x_0- Entwicklungszentrum

1. für $x_0 = 0$ geht die Taylor-Reihe in die Mac Laurin Reihe über, die somit eine spezielle Form der TAYLORschen Reihe ist.

2. Konvergenzradius r
   Die Reihe konvergiert für $|x - x_0| < r$.

<u>Beispiel:</u> Entwicklung der logarithmischen Funktion $f(x) = \ln x$

Die Entwicklung von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist nicht möglich, da der Logarithmus an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist.

Wir wählen $x_0 = 1$ als Entwicklungszentrum:

$f(x) = \ln x$	$f(1) =$
$f'(x) =$	$f'(1) =$
$f''(x) =$	$f''(1) =$
$f'''(x) =$	$f'''(1) =$
$f^{4}(x) =$	$f^{4}(1) =$

damit lautet die Entwicklung

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}(x-1)^3 -$$

$$- \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4!}(x-1)^4 + - ....$$

$$= +(x-1)^1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + ...$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$$

<u>Konvergenzradius</u>

$$\lim_{n \to 1} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to 1} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}}{(-1)^{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \to 1} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 2$$

8.3.3 Näherungspolynome

1. Eine vorgegebene Funktion $f(x)$ wird zuerst in eine Potenzreihe entwickelt.
2. Dann wird diese Reihe nach der *n*-ten Potenz abgebrochen

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

$$f_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x)$$

Man erhält dadurch das Näherungspolynom *n*-ten Grades für $f(x)$ das sog.

Mac LAURINsche Polynom

Die vernachlässigten Glieder fassen wir zu einem sog. Restglied

$R_n(x)$ zusammen.

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(0)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} + \frac{f^{n+2}(0)}{(n+2)!} \cdot x^{n+2} + \ldots$$

$$\boxed{f(x) = f_n(x) + R_n(x)}$$ TAYLORsche Formel

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(J \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$ LAGRANGE

Die Güte des Mac LAURINschen Näherungspolynom läßt sich dabei durch Hinzunahme weiterer Glieder in $f_n(x)$ stets noch verbessern. Gleichzeitig verliert das Restglied $R_n(x)$ immer mehr an Bedeutung und wird schließlich vernachlässigbar klein. Das Restglied beschreibt somit den Fehler, den man begeht.

Alle Aussagen gelten auch für die TAYLORsche Reihenentwicklung.

Beispiel: für die geometrische Deutung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

ersetze durch Näherungspolynom

1, 2, 3 Grades

Mac LAURIN:

$f(x) = (1-x)^{-1}$ $\qquad$ $f(0) =$

$f'(x) =$ $\qquad$ $f'(0) =$

$f''(x) =$ $\qquad$ $f''(0) =$

$f^{3}(x) =$ $\qquad$ $f^{3}(0) =$

$f^{4}(x) =$ $\qquad$ $f^{4}(0) =$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot x^1 + \frac{1\cdot 2}{2!}\cdot x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3!}\cdot x^3 + \ldots..$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.. + x^n + \ldots..$$

im Bereich $|x| < 1$

Näherungspolynome:

1. Näherung: $f_1(x) = 1 + x$ $\qquad$ nur im Bereich
2. Näherung: $f_2(x) = 1 + x + x^2$ $\qquad$ $|x| < 1$
3. Näherung: $f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ $\qquad$ Konvergenzradius

Beispiel: Berechnung der EULERschen Zahl *e*

$f(x) = e^x$ Zuerst Mac LAURINsche Potenzreihenentwicklung
Beispiel aus Kap. 8.3.1

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Nach dem *n*-ten Glied erhalten wir aus der Potenzreihenentwicklung ein Näherungspolynom *n*-ten Grades.

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(J \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{e^{J \cdot x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$ LAGRANGEsches Restglied

für $x = 1$:

$$e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$$

$$R_n(1) = \frac{e^J}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Rechenbeispiel für $n = 5$

$$e = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

$$e = 2{,}716667$$

Fehlerabschätzung $R_5(1) < \frac{3}{(5+1)!} = \frac{3}{6!} = 0{,}0042 < 0{,}5 \cdot 10^{-2}$
auf zwei Dezimalstellen nach dem Komma genau.

8.3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung

Es gibt viele Integrale, die mit herkömmlichen Integrationsmethoden in geschlossener Form nicht lösbar sind. Zu diesen Integralen gehört das GAUSSsche Fehlerintegral, das in statistischen Problemen auftritt.

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

In zahlreichen Fällen läßt sich ein Integral $\int f(x)\ dx$ schrittweise wie folgt lösen:

1. Entwicklung der Integralfunktion $f(x)$ in eine Mac LAUERIN oder TAYLOR Reihe (wir erhalten eine Potenzreihe)

2. Gliedweise Integration nach der Potenzregel

<u>Beispiel:</u> Löse das GAUSSsche Fehlerintegral

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Zuerst wird die Exponentialfunktion e^z entwickelt
Kap. 8.3.1 Substitution $z = -t^2$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

bei $z = -t^2$

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + - \ldots..$$

$$F(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + - \ldots..\right)\, dt =$$

$$= t \quad \frac{t^3}{3\cdot} + \frac{t^5}{5\ \ 2!} - \frac{t^7}{\cdot 3!} \quad \frac{t^9}{9\cdot} - \frac{t^{11}}{11\ \ 5!} + -.\ ..\Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + - \ldots..$$

$\dot{y} = e^{-t^2}$ $\qquad\qquad 0 \leq x \leq 1$

$$A = \int_0^1 e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + - \ldots\ldots \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + - \ldots\ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + - \ldots\ldots$$

Durch Abbruch dieser unendlichen Reihe nach dem 1, 2, ..., 6 Glied erhält man der Reihe nach die folgenden Näherungswerte für den gesuchten Flächeninhalt:

1) 1

2) $1 - \frac{1}{3} = 0{,}6667$

3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 0{,}7667$

4) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = 0{,}7429$

5) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0{,}7475$

6) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} = 0{,}7467$

Beispiele:

1) Berechne den Summenwert der geometrischen Reihen:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$ $|q| < 1$

Im Kap. 8.1.2 wurde die geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$ behandelt.

Als Summenwert S wurde ein Grenzwert der geometrischen Reihe definiert

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

damit $$q = -\frac{1}{8}$$

$$S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{9}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3^{n-1}$$ $q =$

$S =$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

2) Welchem allgemeinen Bildungsgesetz unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

a) $1+\frac{10}{1!}+\frac{100}{2!}+\frac{1000}{3!}+\ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$$

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1}$$

$$a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \qquad a_n=\frac{10^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 10^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10}{n+1}\right| = 0<1$$

konvergent

b) $\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4}$$

c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\ldots$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$

d) $\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+\frac{(\ln 2)^3}{3!}+\ldots$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$

2) Welchem allgemeinen Bildungsgesetz unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

a) $\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{10001}+\ldots$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{10}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{5}$

c) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$

e) $\frac{2^1}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5} - + \ldots$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$

3) Welche alternierenden Reihen konvergieren, welche divergieren? Verwende das Konvergenzkriterium von Leibniz.

$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots$

$$\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} = 0$$ konvergent

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 5^{2n-1}}$

2) Bestimme Konvergenzradius und Konvergenzbereich

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{bei} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

a) $P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n \qquad a_{n+1} = n+1 \qquad a_n = n$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1 \qquad |x| < r \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$$

b) $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$

c) $P(x) = \frac{x^1}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \ldots$

d) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

2) Mac LAURIN und Konvergenzbereich

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) \qquad f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \qquad f'(0) =$$

$$f''(x) = \qquad f''(0) =$$

$$f'''(x) = \qquad f'''(0) =$$

$$f^{(4)}(x) = \qquad f^{(4)}(0) =$$

$$f(x) = 0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 - \frac{3 \cdot 4}{4!}x^4$$

$$\ln\left(1 + x^2\right) =$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

3) Mac LAURIN von $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

8) Mac LAURIN von $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{3}}}=\left(1-x^{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

8.4 Fourier-Reihen

8.4.1 Trigonometrische Reihe

In einfachen Fällen läßt sich ein zeitlich periodischer Vorgang, wie eine Schwingung oder eine Wechselspannung, durch ein Sinusgesetz

$$y(t) = A \cdot \sin(w \cdot t + j\ )$$

oder

$$y(t) = A_1 \cdot \sin(w \cdot t) + A_2 \cdot \cos(w \cdot t)$$

beschreiben. Man spricht dann von harmonischer Schwingung mit der Kreisfrequenz *w* und der Schwingungsdauer $T = \frac{2 \cdot p}{w}$.

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen treten häufig Vorgänge auf, die zwar periodisch aber nicht mehr sinusförmig verlaufen:

Es stellt sich die grundsätzliche Frage, ob es möglich ist, eine nicht-sinusförmige Schwingung aus harmonischen Einzelschwingungen zusammenzusetzen.

Bei den weiteren Überlegungen gehen wir zunächst von einer nicht-sinusförmigen, periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode $p = 2p$ aus.

Sie kann unter gewissen Voraussetzungen in eine

unendliche

trigonometrische Reihe

der Form

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right] =}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cdot \cos(2x) + a_3 \cdot \cos(3x) + \ldots.. + \ldots$$

$$\ldots. + b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin(2x) + b_3 \cdot \sin(3x) + \ldots..$$

entwickelt werden.

Diese trigonometrische Reihe heißt FOURIER-Reihe.

Die Entwicklung einer nicht-sinusförmigen periodischen Funktion bezeichnet man als

harmonische oder FOURIER-ANALYSE

Sie enthält Sinus- und Kosinusfunktionen mit den Kreisfrequenzen

1, 2, 3, ..., n, ... und konstantes Glied $\frac{a_0}{2}$.

Die Konstanten $a_1, a_2, a_3, \ldots., b_1, b_2, b_3, \ldots..$ sind die Fourierkoeffizienten.

8.4.2 Berechnung der Fourierkoeffizienten

Eine Funktion $f(x)$ ist in Form einer FOURIER-Reihe vorgegeben

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right]$$

Man muß a_0, a_n, b_n bestimmen.

<u>1) Bestimmung des Fourierkoeffizienten a_0:</u>

Dazu integriert man die FOURIER-Reihe gliedweise im Periodenintervall (0, 2*p*):

$$\int_0^{2p} f(x)dx = \int_0^{2p} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \right] \right\} dx \qquad \underline{\text{Gl.(1)}}$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_0^{2p} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \int_0^{2p} \cos(nx)dx + b_n \cdot \int_0^{2p} \sin(nx)dx \right]$$

Für die einzelnen Integrale gilt dann unter Verwendung von Tabelle 1

$$\int_0^{2p} dx = 2p \quad ; \quad \int_0^{2p} \cos(nx)dx = 0 \quad ; \quad \int_0^{2p} \sin(nx)dx = 0$$

Gl.(1) reduziert sich zu

$$\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2p = a_0 p$$

$$\Rightarrow \qquad a_0 = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{2p} f(x)dx$$

2) Bestimmung der Fourierkoeffizienten a_n

nach einiger Rechnung erhält man für a_n

$$a_n = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{2p} f(x) \cdot \cos(nx)dx$$

3) Bestimmung der Fourierkoeffizienten b_n

nach einiger Rechnung

$$b_n = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{2p} f(x) \cdot \sin(nx)dx$$