9 Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

9.1 Funktionen von zwei reellen Variablen und ihre Darstellung

Unter Funktionen von zwei unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x;y)$ aus einer Menge D genau ein Element z aus der Menge W zuordnet.

	$z = f\,(x,y)$	Funktionsgleichung
oder	$y = g\,(x,z)$	EXPLIZITE
oder	$x = h\,(y,z)$	DARSTELLUNG:

x,y - unabhängige Veränderliche,
z - abhängige Variable,
f, g, h - Funktionszeichen

D - Definitionsbereich
W - Wertebereich

$$F\,(x,y,z) = 0$$

Relationsgleichung
IMPLIZITE DARSTELLUNG

$$x = x(j, y)$$

$$y = y\,(j, y)$$

$$z = z\,(j, y)$$

drei Funktionsgleichungen

PARAMETERFORM

(j, y) - zwei Parameter als unabhängige Veränderliche

Beispiele:

1) $z = z(x,y) = 2x + y + 5$

Definitionsbereich D: $x,y \in R$
Wertebereich W: $z \in R$
Implizite Form: $z - 2x - y - 5 = 0$

2) $z = z(x,y) = x^2 + y^2$

D: $x,y \in R$
W: $z \geq 0$ (nur positive Funktionswerte)
Implizite Form: $z - x^2 - y^2 = 0$

3) $z = z(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

D: $25 - x^2 - y^2 \geq 0$, da Wurzel

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

W: $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$

$0 \leq z \leq 5$, da $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow z = 5$
Minimum Max.

$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow z = 0$
Max. Min.

Implizite Form: $z - \sqrt{25 - x^2 - y^2} = 0$

Beispiel: Funktionsgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

1. Explizite Form

$$z = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \\ -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

zwei Kugelhalbflächen

2. Implizite Form

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

3. Parameterform

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos j \cdot \cos y \\ y &= r \cdot \sin j \cdot \cos y \\ z &= r \cdot \sin y \end{aligned}$$

$$0 \le j < 2p$$
$$-p \le y < +p$$

Beweise, daß es sich hier um die gleiche Funktion handelt.

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Beispiel:

Gegeben sei die Variablengleichung:

$$F(x,y,z) := \sin(xy) \cdot e^{x+yz} - 1 = 0$$

Welche Funktion $z = f(x,y)$ ist damit bestimmt?

$$\sin(xy) \cdot e^{x+yz} = 1$$

$$z = -\frac{1}{y}\left[x + \ln(xy)\right]$$

Geometrische Darstellung

Da wir jetzt drei Veränderliche haben, legen wir ein rechtshändiges räumliches kartesisches Koordinatensystem (KS) fest.

Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

$$
\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos j \cdot \cos y \\
y &= r \cdot \sin j \cdot \cos y \\
z &= r \cdot \sin y
\end{aligned}
$$

Beispiele:

1) Ebenen im Raum

$$ax + by + cz + d = 0$$

2) Rotationsflächen

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

9.2 Partielle Differentiation (Ableitungen)

Erinnerung für die 1. Ableitung der Funktion einer Variablen: $f(x)$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

9.2.1 Ableitung einer Funktion $z = f(x,y)$:

Der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = z_x}$$

heißt partielle Ableitung bzw. partieller Differentialquotient der Funktion $z = f(x,y)$ nach x.
Hierbei ist y wie eine Konstante zu behandeln.

Der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = z_y}$$

heißt partielle Ableitung bzw. partieller Differentialquotient der Funktion $z = f(x,y)$ nach y.
Hierbei ist x wie eine Konstante zu behandeln.

Beispiel:

1. $f(x,y) = x^2 - x \cdot y^3 - \sqrt{x+y}$

$f_x =$

$f_y =$

2. $f(x,y) = x^y - y^x - \sin(x \cdot y) - x - 1$

$f_x =$

$f_y =$

und an der Stelle P_1 (1,1):

f_x (1,1) =

f_y (1,1) =

3. $z = f(x,y) = \ln(x + y^2) - e^{2 \cdot x \cdot y} + 3x$ in P_1 (0,1), P_2 (1,-3)

$z_x =$

$z_y =$

z_x (0,1) =

z_y (0,1) =

z_x (1,-3) =

z_y (1,-3) =

Beispiel:

4. $z = f(x,y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$ in $P\ (1,2)$

$f_x\ (x,y) =$

$f_y\ (x,y) =$

$f_x\ (1,2) =$

$f_y\ (1,2) =$

5. $u = u(x,y,z) = 2x \cdot e^{y \cdot z} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Berechne u_y

$u_y =$

6. $u = u(x,y,z) = \sin(x - y) \cdot \cos(z + 2y)$

Berechne die partiellen Ableitungen und ihre Werte an der Stelle $x = \pi$, $y = 0$, $z = \pi$.

$u_x\ (x,y,z) =$

$u_y\ (x,y,z) =$

$u_z\ (x,y,z) =$

$u_x\ (\pi,0,\pi) =$

$u_y\ (\pi,0,\pi) =$

$u_z\ (\pi,0,\pi) =$

9.2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Auf partielle Ableitungen höherer Ordnung stößt man, wenn man eine Funktion von

mehreren Variablen
mehrmals nacheinander

partiell differenziert.

$$z = f\,(x,y)$$

f_x $\qquad\qquad\qquad$ f_y

f_{xx} $\qquad$ f_{xy} $\qquad$ f_{yx} $\qquad$ f_{yy}

f_{xxx} $\quad$ f_{xxy} $\quad$ f_{xyx} $\quad$ f_{xyy} $\quad$ f_{yxx} $\quad$ f_{yxy} $\quad$ f_{yyx} $\quad$ f_{yyy}

z.B. $\quad f_{xyx}\quad$ ist eine gemischte partielle Ableitung 3. Ordnung
(auszuführen von links nach rechts)

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Satz von Schwarz

Die gemischten partiellen Ableitungen k-ter Ordnung sind unabhängig von der Reihenfolge der Ableitungen.

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

Beispiel:

1. $z(x,y) = \ln(x^2 + y)$

$z_x =$

$z_y =$

$z_{xy} =$

$z_{yx} =$

2. Bestimme sämtliche partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung für die Funktion

$$z = \frac{x-y}{x+y}$$

$z_x =$

$z_y =$

$z_{xx} =$

$z_{xy} = z_{yx} =$

$z_{yy} =$

$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx} =$

$z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy} =$

$z_{yyy} =$

3. Wie lauten die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x,y,z) = e^{x-y} \cdot \cos(5z)$?

4. Bilde sämtliche partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Funktion $f(x,y) = x^5 \cdot y^3 - \cos x \cdot \sin y - e^{x \cdot y^2} + 1$

Beispiel:

Bilde sämtliche partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung von der Funktion $f(x,y)=\sqrt{y}\cdot\ln x$

9.2.3 Das totale (vollständige) Differential

Unter dem totalen oder vollständigen Differential dz einer Funktion zweier Veränderlicher $z = f(x,y)$ versteht man den Ausdruck

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

Bei n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ lautet das totale Differential:

$$dy = f_{x_1} \cdot dx_1 + f_{x_2} \cdot dx_2 + \ldots\ldots + f_{x_n} \cdot dx_n =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

<u>INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG</u>

Damit ein Term der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

das vollständige Differential dz einer Funktion $z = f(x,y)$ darstellt, ist es notwendig und hinreichend, daß die "Integrabilitätsbedingung"

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$ besteht.

<u>Beweis:</u> $P(x,y) = f_x$ und $Q(x,y) = f_y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad f_{xy} = f_{yx}$$, was laut Schwarz vorliegt

Beispiel: Wie lautet das totale Differential folgender Funktionen?

1. $z = \ln\cot(x+y)$

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$dz = -\left[\tan(x+y) + \cot(x+y)\right](dx + dy)$$

2. $z = \sin(x \cdot \cos y)$

$$dz = \cos(x \cdot \cos y) \cdot [\cos y \cdot dx - x \cdot \sin y \cdot dy]$$

3. $z = \sin(\cos(xy))$

$$dz = -\cos(\cos(xy)) \cdot \sin(xy) \cdot (y \cdot dx + x \cdot dy)$$

Beispiel: Prüfe, ob die Ausdrücke ein totales Differential darstellen.

1. $(x+y)dx-(y-x)dy$

2. $\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(2xy^3-3x^4y\right)dy$

3. $(\sin x-y)dx+(\cos y-x+1)dy$

4. $\left(y\cdot e^{x\cdot y}-x^2+1\right)dx+\left(x\cdot e^{x\cdot y}+y^2-1\right)dy$

5. x^3dx-4y^2dy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$z = \arcsin\frac{x}{y}$$

9.2.3.1 Partielle Ableitungen, wenn Funktionen in Parameterdarstellung vorliegen

Sei $z = f(x,y)$ mit $x = x(t)$ und $y = y(t)$

dann wird auch z eine Funktion von t.

Und dann gilt:

$$\boxed{\dot{z}(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \dot{y} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y}}$$

mit $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \quad \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \quad \dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$

<u>Beispiel:</u>

$$z = x^2 - xy + y^2 \quad , \quad x = \sin t \quad , \quad y = \cos t$$

$$z_x = 2x - y \qquad \dot{x} = \cos t$$

$$z_y = 2y - x \qquad \dot{y} = -\sin t$$

$$\dot{z} = (2x - y) \cdot \cos t + (2y - x) \cdot (-\sin t) =$$

$$= (2\sin t - \cos t)\cos t - (2\cos t - \sin t) \cdot \sin t =$$

$$= 2\sin t \cos t - \cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t =$$

$$= -(\cos^2 t - \sin^2 t) = -\cos(2t)$$

9.2.4 Implizite Differentiation

Vorgelegt sei eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen in der impliziten Form

$$f(x,y) = 0$$

Wir gehen im Folgenden davon aus, daß damit eine Funktion

$$y = f(x)$$

definiert ist.

Um ihre Ableitung y' zu bilden waren wir bis jetzt gezwungen zunächst die Funktion nach y aufzulösen und an der expliziten Form

$$y = f(x)$$

die Ableitung formal vorzunehmen. In vielen Fällen ist die Auflösung weder nach y noch nach x möglich, z.B. bei

$$F(x,y) = y \cdot \sin x - x \cdot \cos y - x + y - 1 = 0$$

$$F(x,y) = x^5 - 2x^3y^2 - xy^4 - y^5 + x^y + 1 = 0$$

Um auch in solchen Fällen die Ableitung y' bilden zu können gehen wir von

$$z = f(x,y)$$

aus und bilden ihr totales Differential

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

oder

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

Setzen wir jetzt wieder

$z = f\,(x,y) = 0$, so folgt mit $dz = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad / : dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad , \frac{dy}{dx} = y'$$

$$f_x + f_y \cdot y' = 0$$

$$\boxed{y' = -\frac{f_x}{f_y}}$$

f_y muß ungleich Null sein,

andernfalls existiert y' nicht

Um die zweite Ableitung y'' zu erhalten bilden wir die Substitution:

$$y' = \varphi\,(x, y)$$

totales Differential von y' , dy'

$$dy' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy \qquad / : dx$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \text{mit } \frac{dy'}{dx} = y''$$

$$y'' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi) \cdot y'$$

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x}(y') + \frac{\partial}{\partial y}(y') \cdot y'$$

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) \cdot \left(-\frac{f_x}{f_y}\right)$$

$$y'' = -\frac{f_{xx} \cdot f_y - f_x \cdot f_{yx}}{f_y^{\,2}} + \frac{f_{xy} \cdot f_y - f_x \cdot f_{yy}}{f_y^{\,2}} \cdot \frac{f_x}{f_y}$$

gemeinsamer Nenner bringt:

$$y'' = -\frac{f_{xx} \cdot f_y^{\,2} - f_x \cdot f_{yx} \cdot f_y}{f_y^{\,3}} + \frac{f_x \cdot f_{xy} \cdot f_y - f_x^{\,2} \cdot f_{yy}}{f_y^{\,3}}$$

$$y'' = \frac{-f_{xx} \cdot f_y^{\,2} + f_x \cdot f_{yx} \cdot f_y + f_x \cdot f_{xy} \cdot f_y - f_x^{\,2} \cdot f_{yy}}{f_y^{\,3}}$$

$$y'' = \frac{-f_{xx} \cdot f_y^{\,2} + 2 \cdot f_x \cdot f_{xy} \cdot f_y - f_x^{\,2} \cdot f_{yy}}{f_y^{\,3}}$$

$$\boxed{y'' = -\frac{f_{xx} \cdot f_y^{\,2} - 2 \cdot f_x \cdot f_{xy} \cdot f_y + f_x^{\,2} \cdot f_{yy}}{f_y^{\,3}}}$$

f_y muß ungleich Null sein.

Man beachte, daß

$$y' \quad \text{und} \quad y''$$

als Funktionen von x und y erscheinen:

$$y' = y'(x,y)$$

$$y'' = y''(x,y)$$

Beispiel:

Man bestimme die ersten beiden Ableitungen der Funktion:

$$F(x, y) = x \cdot \sin y + y - 3 = 0$$

$f_x =$

$f_y =$

$f_{xx} =$

$f_{xy} =$

$f_{yy} =$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} =$$

$$y'' =$$

$$y'' = \frac{x \cdot \sin^3 y + 2 \cdot x \cdot \sin y \cdot \cos^2 y + \sin(2y)}{\left(x \cdot \cos y + 1\right)^3}$$

Unter Anwendung der herkömmlichen Methode (gliedweise Differentiation + Kettenregel):

$$\sin y + x \cdot \cos y \cdot y' + y' = 0$$

$$\sin y + (x \cdot \cos y + 1) \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{\sin y}{x \cdot \cos y + 1}$$

$$y'' = -\frac{\cos y \cdot y' \cdot (x \cdot \cos y + 1) - \sin y \cdot (\cos y - x \cdot \sin y \cdot y')}{(x \cdot \cos y + 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{\cos y \dfrac{-\sin y}{(x \cdot \cos y + 1)}(x \cdot \cos y + 1) - \sin y\left(\cos y - \dfrac{x \sin y(-\sin y)}{(x \cdot \cos y + 1)}\right)}{(x \cdot \cos y + 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{-\cos y \cdot \sin y - \sin y \cdot \cos y - \dfrac{x \cdot \sin^3 y}{(x \cdot \cos y + 1)}}{(x \cdot \cos y + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2 \cdot \sin y \cdot \cos y + \dfrac{x \cdot \sin^3 y}{(x \cdot \cos y + 1)}}{(x \cdot \cos y + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{\dfrac{\sin(2y) \cdot (x \cdot \cos y + 1)}{(x \cdot \cos y + 1)} + \dfrac{x \cdot \sin^3 y}{(x \cdot \cos y + 1)}}{(x \cdot \cos y + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{\dfrac{\sin(2y) \cdot (x \cdot \cos y + 1) + x \cdot \sin^3 y}{(x \cdot \cos y + 1)}}{(x \cdot \cos y + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{\sin(2y) \cdot (x \cdot \cos y + 1) + x \cdot \sin^3 y}{(x \cdot \cos y + 1)^3}$$

Zähler, da der Nenner gleich ist:

Z:= $2 \cdot \sin y \cdot \cos y \cdot x \cdot \cos y + \sin(2y) + x \cdot \sin^3 y$

Z:= $x \cdot \sin^3 y + 2 \cdot x \cdot \sin y \cdot \cos^2 y + \sin(2y)$

Beispiel: Berechne y' der Funktion

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad / \cdot 16 \text{ bzw. } \cdot 36$$

$F(x,y)$ Gestalt ist zuerst gesucht:

$F(x,y) =$

$$y' = -\frac{4x}{9y}$$

Beispiel: Bestimme *y'* der Funktion

$$F(x,y) = \ln y - \sqrt[3]{\cos x} = 0 \qquad \ln y - (\cos x)^{\frac{1}{3}} = 0$$

sowohl in der impliziten als auch nach Herstellung der expliziten Form.

Implizite Form:

mit $y = e^{\sqrt[3]{\cos x}}$

$$\boxed{y' = -\frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{\cos x}} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}}$$

Explizite Form: $y = e^{\sqrt[3]{\cos x}}$

Beispiel:

1) Bestimme y' für

$$x^3 + y^3 - x^2y^2 - x^2 - xy + y = 0$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2 - 2xy^2 - 2x - y}{3y^2 - 2x^2y - x + 1}$$

2) Bestimme y'' für

$$F(x,y) = xy - x^4 + y^2 = 0$$

$$y'' = \frac{-32x^6 + 4x^4 + 48x^3y + 48x^2y^2 + 2xy + 2y^2}{\left(x + 2y\right)^3}$$

<u>Beispiel:</u> Welchen Wert hat $y''(1,1)$ für die implizite Funktion

$$y \cdot \ln x - x \cdot \ln y = 0$$

$$y'' = -\frac{-\frac{y}{x^2}\left(\ln x - \frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x} - \ln y\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{x} - \ln y\right)\frac{x}{y^2}}{\left(\ln x - \frac{x}{y}\right)^3}$$

$$y''(1,1) = 0$$