11 Gewöhnliche Differentialgleichung

11.1 Einleitung und Grundbegriffe

Def.: Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine

Funktionsgleichung,

die eine unbekannte Funktion $y = y(x)$
sowie deren Ableitungen nach x enthält.
Die Ordnung der Differentialgleichung ist die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung von $y(x)$ nach x.

Die allgemeine Differentialgleichung n-ter Ornung für eine Funktion $y = y(x)$:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{implizite Form}$$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad \text{explizite Form}$$

Als Lösung (Lösungsfunktion, Integral) einer Differentialgleichung bezeichnet man jede Funktion

$$y = y(x),$$

die samt ihren Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt, diese identisch erfüllt.

Beispiele:

$y' = 2x$	explizite DGL 1. Ordnung (y')
$x + y \cdot y' = 0$	implizite DGL 1. Ordnung (y')
$y' + y \cdot y'' = 0$	implizite DGL 2. Ordnung (y'')
$y''' + 2 \cdot y' = \cos x$	implizite DGL 3. Ordnung (y''')
$y^{(6)} - y^{(4)} + y'' = e^x$	implizite DGL 6. Ordnung ($y^{(6)}$)

Man unterscheidet folgende Typen von Lösungen:

1. Die allgemeine Lösung einer DGL *n*-ter Ordnung; sie enthält noch *n* unbestimmte und voneinander unabhängige *n*-Konstanten

   $y = y\ (x, C_1, C_2, ..., C_n)$

2. Eine spezielle (partikuläre) Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den *n*-Konstanten feste Werte zuweist. Dies kann beispielsweise durch Anfangs- oder Randbedingungen geschehen.

11.2 Geometrische Deutung

$$y' = 2 \cdot x$$

Lösung durch Integration:

$$\int y' dx = \int 2 \cdot x \quad dx = x^2 + C$$

allg. Lösung: $y = x^2 + C$ Parabelschar

Die partikuläre Lösung entsteht für jeden speziellen Wert des Parameters C.

Beispiel:

$$y'^2 = 4 \cdot y$$

allg. Lösung $\Rightarrow$ $y = (x + C)^2$; $C \in R$

$$y' = 2(x + C)$$

$$4 \cdot (x^2 + 2Cx + C^2) = 4 \cdot (x^2 + 2Cx + C^2)$$

$$0 = 0$$

Die allg. Lösung einer DGL *n*-ter Ordnung ist eine *n*-parametrige Kurvenschar. UND UMGEKEHRT Jede *n*-parametrige Kurvenschar kann durch eine DGL *n*-ter Ordnung beschrieben werden.

Beispiel: Gegeben sei die Schar aller Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte auf der Geraden $y = x$ liegen.

Wie lautet ihre Differentialgleichung?

Die allgemeine Kreisgleichung:

$$\left(x - x_M\right)^2 + \left(y - y_M\right)^2 = r^2$$

$M\ (x_M, y_M)$ - Mittelpunkt
r - Radius

$x_M = y_M = C$

und

$x_M^{\ 2} + y_M^{\ 2} + r_2 \quad \Rightarrow \quad 2C^2 = r^2$

Lösung: Da es nur einen Parameter C gibt handelt es sich hier um eine einparametrige Kurvenschar. Die Lösung muß eine DGL 1.-Ordnung sein.

$$(x - C)^2 + \left(y - C\right)^2 = 2C^2$$

.

.

.

$$x^2 + y^2 - 2C(x + y) = 0 \qquad (1)$$

implizite Differentiation ergibt:

$$2x + 2y \cdot y' - 2C\left(1 + y'\right) = 0 \qquad (2)$$

Aus (1) folgt für den Parameter C

$$2C = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

in (2) eingesetzt führt es zu:

$$2x + 2y \cdot y' - \frac{x^2 + y^2}{x + y} \cdot \left(1 + y'\right) = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' - \frac{\left(x^2 + y^2\right)}{x + y} - \frac{\left(x^2 + y^2\right)}{x + y} \cdot y' = 0 \qquad /(x+y)$$

$$2x \cdot (x + y) + 2y \cdot (x + y) \cdot y' - x^2 - y^2 - \left(x^2 + y^2\right) \cdot y' = 0$$

$$2x^2 + 2xy + y' \cdot \left(2xy + 2y^2 - x^2 - y^2\right) - x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 + 2xy - y^2 - \left(x^2 - 2xy - y^2\right) \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$$

11.3 Anfangswert- und Randwertprobleme

11.4 Differentialgleichungen erster Ordnung

Lösungsmethoden

11.4.1 Trennung der Variablen
(Integration durch Trennung der Variablen)

Läßt sich die rechte Seite der Gleichung

$$y = f(x,y)$$

in der Produktform

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

schreiben, so kann man die Variablen *x, y* “trennen“.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \qquad g(y) \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

Integration der beiden Seiten

Beispiel:

1) $y' = y$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot 1$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + C$ statt $C \to \ln C$

$\Downarrow$ $\ln|y| = x + \ln|C|$

$|y| = e^{x+C}$ $\ln|y| - \ln|C| = x$

$y = \pm \quad e^x \cdot e^C$ $\ln\left|\frac{y}{C}\right| = x$

$y = K \cdot e^x$ mit $K \neq 0$ $\frac{y}{C} = e^x$

$$\underline{\underline{y = C \cdot e^x}}$$

2) $y \cdot y' + x = 0$

mit $2C = R^2$ $\underline{\underline{x^2 + y^2 = R^2}}$

Beispiel:

Anfangswertaufgabe

$x + y \cdot y' = 0$, $y\,(0) = 2$

Lösung: $y\,dy = -\,x\,dx$

wie vorherige Aufgabe

$x^2 + y^2 = R^2$

Spezielle Lösung:

für $x = 0 \Rightarrow y = 2$

$0^2 + 4 = R^2$

$R^2 = 4$

$\underline{\underline{x^2 + y^2 = 4}}$

11.4.2 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution
Homogene Differentialgleichungen

Eine explizite DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x,y)$$

kann mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine separable Dgl. 1. Ordnung zurückgeführt werden.

11.4.2.1 DGL vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

<u>Substitution:</u> $u = ax + by + c$ (1)

Dabei sind y und u als Funktionen von x zu betrachten.

Durch Differentiation der Substitution nach x erhalten wir:

$$u' = a + by' \qquad (2)$$

Durch die Substitution ergibt sich: $y' = f(u)$

Damit ist aus (2) eine separable DGL

$$u' = a + b\,f(u)$$

entstanden, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann, da die rechte Seite dieser Gleichung nur von u abhängt.
Anschließend führen wir die Rücksubstitution durch.

Beispiel:

1) $$y' = 2x - y$$

Substitution: $u = 2x - y = y'$

$$u' = 2 - y' \quad \rightarrow \quad y' = u$$

$u' = 2 - u$ jetzt Trennung

$$\int \frac{du}{2-u} = \int dx$$

$$-\ln|2-u| = x - \ln|C|$$

$$\ln|2-u| = -x + \ln C$$

$$2 - u = Ce^{-x}$$

$$u = 2 - Ce^{-x}$$

$$2x - y = 2 - Ce^{-x}$$

$$\underline{\underline{y = Ce^{-x} + 2x - 2}}$$

2) $$y' = (x + y + 1)^2$$

$$y = \tan(x + C) - x - 1$$

11.4.2.2 DGL vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

<u>Substitution:</u> $u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = u\,x$

Differentiation nach x : $y' = u' \cdot x + u \cdot 1$

$$y' = u' \cdot x + u$$

$$y' = f(u) = u + u' \cdot x \qquad \text{oder} \qquad u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

<u>Beispiel:</u>

1) $y' = \frac{x + 2y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + 2u$

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u$$

$$u' \cdot x + u = 1 + 2 \cdot u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = 1 + u$$

<u>Trennung der Variablen:</u> $\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x}$

$$\ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|u+1| = \ln|Cx|$$

$$u + 1 = Cx \qquad \text{oder} \qquad u = Cx - 1$$

<u>Rücksubstitution:</u> $\frac{y}{x} = Cx - 1 \quad \Rightarrow \quad y = Cx^2 - x$

Allg. Lösung der DGL $y' = \frac{x + 2y}{x}$ ist $y = Cx^2 - x$

Beispiel:

2) $$xy' = y + 4x$$

$$y = 4x \ln|Cx|$$

3) $$x^2 \cdot y' = \frac{1}{4} \cdot x^2 + y^2$$

$$\int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{x}{\ln|Cx|}$$

11.4.3 Lineare DGL 1. Ordnung

Def.: Eine DGL 1. Ordnung heißt <u>linear,</u>

wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

$g(x)$ - Störfunktion (Störglied)

für $g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{y' + f(x) \cdot y = 0}$ homogen

<u>Kennzeichen einer linearen DGL 1. Ordnung:</u>

A. y und y' in 1. Potenz (d.h. sie treten linear auf)

B. $y \cdot y'$ kann nicht vorkommen

<u>Beispiele:</u>

a) $y' - xy = 0$ lineare DGL; homogen, da $g(x) = 0$

b) $xy' + 2y = e^x$ /: x

$y' + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{e^x}{x}$ lineare DGL; inhomogen, da $g(x) = \frac{e^x}{x}$

c) $y' + (\tan x) \cdot y = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ inhomogen

<u>Beispiel:</u> für nicht-lineare DGL

a) $y' = 1 - y^2$ y tritt in der 2. Potenz auf

b) $y \cdot y' + x = 0$ DGL enthält ein “verbotenes“ gemischtes Produkt $y \cdot y'$

11.4.3.1 Homogene DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \qquad , \qquad \text{mit } g(x) = 0$$

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = 0}$$

$$y' = -f(x) \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int f(x)dx + \ln|C|$$

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int f(x)dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int f(x)dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int f(x)dx}$$

$$\boxed{y = Ce^{-\int f(x)dx}}$$

Beispiel:

1) $x^2 \cdot y' + y = 0$

$y' + \frac{1}{x^2} \cdot y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2}$

$\ln|y| = \frac{1}{x} + \ln|C| \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{1}{x}$

$\underline{\underline{y = Ce^{\frac{1}{x}}}}$

2) $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 5$

$y = Ce^{x^2}$ - allgemeine Lösung

spezielle Lösung für $y(0) = 5$

$5 = C\, e^0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 5$

$\underline{\underline{y = 5 \cdot e^{x^2}}}$

11.4.3.2 Inhomogene DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \qquad \text{(Gl.(1))}$$

Lösung mit der Methode von LAGRANGE

1. Schritt: Bestimmung der allg. Lösung der homogenen Gleichung y_H durch Trennung der Variablen:

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

$$y_H = Ce^{-\int f(x)dx}$$

2. Schritt: Bestimmung der partikulären Lösung der inhomogenen DGL y_P durch Variation der Konstanten:

Das bedeutet, die Konstanze C wird ersetzt durch eine Funktion $C(x)$, und zwar so:

Ansatz: $$y_P = C(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

Die Lösung y_P und y_H stimmen bis auf C und $C(x)$ überein.

Der Ansatz für y_P wird in die DGL GL. (1) eingesetzt.
Dabei wird die Ableitung beim Glied y' ausgeführt und $C'(x)$, die durch die Ableitung entstanden ist, gewonnen. Durch Integration von $C'(x)$ wird $C(x)$ bestimmt und in den y_P - Ansatz eingesetzt.

3. Schritt:

$$\boxed{y_A = y_H + y_P}$$

Beispiel:

1) $y' = 4y - e^x$

Die DGL ist vom Typ: $y' - 4y = -e^x$

1. Schritt: $y' - 4y = 0$ (homogene DGL)

$$\int \frac{dy}{y} = \int 4 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 4x + \ln|C|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_H = Ce^{4x}}$$

2. Schritt: Ansatz $\boxed{y_P = C(x) \cdot e^{4x}}$ den man in die inhomogene DGL einsetzt:

$$\left(C(x) \cdot e^{4x}\right)' - 4 \cdot \left(C(x) \cdot e^{4x}\right) = -e^x$$

Jetzt muß noch die Ableitung durchgeführt werden.

$$C'(x) \cdot e^{4x} + C(x) \cdot e^{4x} \cdot 4 - 4 \cdot C(x) \cdot e^{4x} = -e^x$$

$$C'(x) = -\frac{e^x}{e^{4x}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C'(x) = -e^{-3x}}}$$

Integration führt zu:

$$C(x) = \int C'(x)dx = \int -e^{-3x}dx = \frac{1}{3} \cdot e^{-3x} + C$$

Damit ist $y_P = \frac{1}{3} \cdot e^{-3x} \cdot e^{4x} = \frac{1}{3} \cdot e^x$

3. Schritt: $y_A = y_H + y_P = C \cdot e^{4x} + \frac{1}{3} \cdot e^x$

Beispiel:

2) $$y' + \frac{y}{x} = \cos x$$

1.Schritt:

$$\boxed{y_H = \frac{C}{x}}$$

2. Schritt:

$$\boxed{y_P = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{x}}$$

3. Schritt:

11.5

Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \qquad \text{DGL 2. Ordnung}$$

11.5.1 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{y'' + ay' + by = g(x)}$$

$g(x)$ - Störfunktion (Störglied)

1. $y, \; y', \; y''$ treten linear, d.h. in 1. Potenz auf

2. $yy', \; yy'', \; y'y''$ sind in der DGL nicht enthalten

Beispiele: lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'' + y = 0$ homogen

$y'' + 2y' - 3y = 2x - 4$ inhomogen

$2y'' - 4y' + 20y = \cos x$ inhomogen

Beispiele: lineare DGL 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten

$$y'' + xy' + y = 0$$

$$x^3 y'' + x^2 y' - xy = e^x$$

11.5.1.1 Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \text{Gl.(1)}$$

Lösungsansatz in Form einer Exponentialfunktion

$$y = e^{l \cdot x} \qquad l \text{ - Parameter}$$

Damit in die Gl.(1)

$$\left(e^{l \cdot x}\right)'' + a \cdot \left(e^{l \cdot x}\right)' + b \cdot \left(e^{l \cdot x}\right) = 0$$

oder

$$y' = e^{l \cdot x} \cdot l$$

$$y'' = e^{l \cdot x} \cdot l^{2}$$

$$l^{2} \cdot e^{l \cdot x} + a \cdot l \cdot e^{l \cdot x} + b \cdot e^{l \cdot x} = 0 \qquad /: e^{lx}$$

$$\boxed{l^{2} + al + b = 0}$$

charakteristische Gleichung der homogenen Gl.

Sie besitzt die Lösungen in Abhängigkeit der Diskrimante

$$\Delta = a^2 - 4b \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{a^2 - 4b}$$

<u>1. Fall:</u>

$$\Delta = a^2 - 4b > 0$$

$$l_{1} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Die Lösungsfunktionen heißen:

$y_1 = e^{l_1 \cdot x}$ und $y_2 = e^{l_2 \cdot x}$ $\qquad \boxed{y_0 = C_1 \cdot e^{l_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{l_2 \cdot x}}$

Beispiel:

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

Charakteristische Gleichung durch Lösungsansatz

$$y = e^{l \cdot x}$$

$$l^2 + 2l - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 \qquad , \sqrt{\Delta} = 6$$

$$l_1 = \frac{-2+6}{2} = 2 \qquad l_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$$

damit die Lösungsfunktion (Fundamentalbasis der DGL)

$$y_1 = e^{2 \cdot x} \qquad y_2 = e^{-4 \cdot x}$$

Allgemeine homogene Lösung

$$\boxed{y_0 = C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-4 \cdot x}}$$

2. Fall

$$\Delta = a^2 - 4b = 0$$

$$l_1 = l_2 = l_0 = -\frac{a}{2}$$

Die Lösungsfunktion heißt:

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \qquad y_2 = x \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x}$$

Allgemeine homogene Lösung: $y_0 = C_1 \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x}$

$$\boxed{y_0 = \left(C_1 + C_2 \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x}}$$

Beispiel:

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$l^2 - 8 \cdot l + 16 = 0$$

$$\Delta = 64 - 64 = 0 \qquad , \qquad \sqrt{\Delta} = 0$$

$$l_0 = \frac{8}{2} = 4$$

Fundamentalbasis der DGL:

$$y_1 = e^{4 \cdot x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = x \cdot e^{4 \cdot x}$$

Allgemeine homogene Lösung: $y_0 = C_1 \cdot e^{4 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{4 \cdot x}$

$$\boxed{y_0 = \left(C_1 + C_2 \cdot x\right) \cdot e^{4 \cdot x}}$$

3. Fall

$$\Delta = a^2 - 4b < 0$$

Die Gl. $l^2 + a l + b = 0$ besitzt jetzt konjugiert komplexe Lösungen.

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= a + jw \\ l_2 &= a - jw \end{aligned}}$$

$$a = -\frac{a}{2}$$

$$w = \sqrt{\frac{-a^2 + 4b}{4}} = \frac{\sqrt{-a^2 + 4b}}{2}$$

$$l_1 = \frac{-a + \sqrt{-a^2 + 4b}}{2}$$

$$l_2 = \frac{-a - \sqrt{-a^2 + 4b}}{2}$$

Die Fundamentalbasis der homogenen DGL besteht aus den komplexen Zahlen:

$$y_1 = e^{(a + jw)\cdot x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{(a - jw)\cdot x}$$

oder aus den reellen Zahlen:

$$y_1 = e^{a\cdot x} \cdot \sin(w \cdot x) \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{a\cdot x} \cdot \cos(w \cdot x)$$

<u>Allgemeine homogene Lösung:</u>

$$y_0 = C_1 \cdot e^{a\cdot x} \cdot \sin(w \cdot x) + C_2 \cdot e^{a\cdot x} \cdot \cos(w \cdot x)$$

$$\boxed{y_0 = e^{a\cdot x}\left(C_1 \cdot \sin(w \cdot x) + C_2 \cdot \cos(w \cdot x)\right)}$$

<u>Beispiel:</u>

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$l^2 + 4l + 13 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$$

$$l_1 = \frac{-4 + \sqrt{-36}}{2} = -2 + 3j$$

$$l_2 = \frac{-4 - \sqrt{-36}}{2} = -2 - 3j$$

damit $\qquad a = -2 \qquad$ und $\qquad w = 3$

Reelle Fundamentalbasis der DGL:

$$y \qquad {}^{2\cdot x} \cdot \sin(3 \cdot x \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{-2\cdot x} \cdot \cos(3 \cdot x)$$

$$y_0 = e^{-2\cdot x}\left(C_1 \cdot \sin(3 \cdot x) + C_2 \cdot \cos(3 \cdot x)\right)$$

Beispiele:

1) $$y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$l^{2} + 3l - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \quad , \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$l_{1} = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad\qquad l_{2} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

Fundamentalbasis (FDB): $y_1 = e^{x}$, $y_2 = e^{-4\cdot x}$

Allg. homogene Lösung der DGL $y_0 = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-4\cdot x}$

2) $$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Allg. homogene Lösung: $y_0 = e^{3\cdot x} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x\right)$

3) $$y'' + 4y' + 20y = 0$$

Allg. Lösung: $y_0 = e^{-2\cdot x} \cdot \left[C_1 \cdot \sin(4 \cdot x) + C_2 \cdot \cos(4 \cdot x)\right]$

11.5.1.2 Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + b = g(x)$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung ist als SUMME aus

- der allgemeinen Lösung $y_0(x)$ der zugehörigen <u>homogenen</u> linearen DGL

  $$y'' + ay' + b = 0$$

- und einer partikulären Lösung der <u>inhomogenen</u> linearen DGL

$$\boxed{y_A(x) = y_0(x) + y_P(x)}$$

Beispiel:

$$\boxed{y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1} \qquad \text{Gl.(1)}$$

$$y'' + ay' + by \mathrel{\hat{=}} P_n(x) \qquad \text{Polynom}$$

$$g(x)$$

1. Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y'' + 10y' - 24y = 0$$

$$l^2 + 10l - 24 = 0$$

$$\Delta = 100 + 96 = 196 > 0 \quad , \quad \sqrt{\Delta} = 14$$

$$l_1 = \frac{-10 - 14}{2} = -12$$

$$l_2 = \frac{-10 + 14}{2} = 2$$

Die FDB:

$$y_1 = e^{-12 \cdot x} \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{2 \cdot x}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL erhalten wir durch Linearkombination ($y_1 + y_2$)

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-12 \cdot x} + C_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

2. Schritt: Partikuläres Integral der inhomogenen DGL

Aus der Tabelle für Ansätze nehmen wir für $g(x)$ als Polynom mit b = -24 ≠ 0

$$y_P = Q_n(x)$$

also $$y_P = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Da wir auch y_P' und y_P'' brauchen, leiten wir zuerst ab

$$y_P' = 2a_2 x + a_1$$

$$y_P'' = 2a_2$$

und setzen die Ableitungen in die Gl.(1) ein.

$$2a_2 + 10(2a_2 x + a_1) - 24(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 12x^2 + 14x + 1$$

$$2a_2 + 20a_2 x + 10a_1 - 24a_2 x^2 - 24a_1 x - 24a_0 = 12x^2 + 14x + 1$$

$$-24a_2 x^2 + (20a_2 - 24a_1)x + (2a_2 + 10a_1 - 24a_0) = 12x^2 + 14x + 1$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} -24a_2 &= 12 \\ 20a_2 - 24a_1 &= 14 \\ 2a_2 + 10a_1 - 24a_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 &= -1 \\ a_0 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit ist $$y_P = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

$$y_A = C_1 \cdot e^{-12 \cdot x} + C_2 \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Beispiel:

$$y'' + y' - 2y = g(x)$$

$$l^2 + l - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \;\; ; \;\; \sqrt{\Delta} = 3$$

$$l_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad l_2 = -2$$

Damit FDB:

$$y_1 = e^x \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{-2 \cdot x}$$

und die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_0 = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x}$$

$$\overset{\displaystyle b}{\downarrow}$$
$$y'' + y' - 2y = g(x)$$

Als $g(x)$ können folgende Störfunktionen auftreten:

	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_P(x)$	Begründung
1.	$g(x) = 10x + 1$ Tabelle: 1	$y_P = a_1 x + a_0$	da $b = -2 \neq 0$ Polynom $Q_n(x)$ vom Grade $n = 1$
2.	$g(x) = x^2 - 4x + 3$ Tabelle: 1	$y_P = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	da $b = -2 \neq 0$ Polynom $Q_n(x)$ vom Grade $n = 2$
3.	$g(x) = 3\, e^{4x}$ Tabelle: 2/1	$y_P = A\, e^{4x}$	da $c = 4$ und keine Lösung der charakt. Gleichung ist $l = 1$ und $l = -2$
4.	$g(x) = 6\, e^x$ Tabelle:2/2	$y_P = A\, x\, e^x$	da $c = 1$ und eine einfache Lösung der charakt. Gleichung ist $l = 1$
5.	$g(x) = x\, e^x$ Tabelle: 4/2	$y_P = x\, e^x\, (a_1 x + a_0)$ $= e^x (a_1 x^2 + a_0 x)$	da $c = 1$ und eine Lösung $c + jb \mathrel{\hat{=}} 1 + j \cdot 0$ $\Rightarrow\ b = 0\ ,\ c = 1$ ist eine Lösung der charakt. Gleichung
6.	$g(x) = 3 \sin(2x)$ Tabelle: 3/1	$y_P = A \sin(2x) +$ $B \cos(2x)$	$jb = 2\, j$ ist keine Lösung der charakt. Gleichung

Berechnung der Integration der DGL

$$y'' + y' - 2y = g(x)$$

wenn $g(x)$ die in der Tabelle 2 angegebene Funktion ist.

1. $\underline{\underline{y'' + y' - 2y = 10x + 1}}$ Gl.(1/1)

Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} y_P &= a_1 x + a_0 \\ y_P' &= a_1 \\ y_P'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in die Gl.(1/1) eingesetzt}$$

$$0 + a_1 - 2(a_1 x + a_0) = 10x + 1$$

$$-2a_1 x + (a_1 - 2a_0) = 10x + 1$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{cases} -2a_1 & & = 10 \\ a_1 & -2a_0 & = 1 \end{cases}$$

$$a_1 = -5$$

$$a_0 = -3$$

Damit ist: $y_P = -5x - 3$

Die allg. Lösung der DGL ($y'' + y' - 2y = 10x + 1$) lautet:

$$\underline{\underline{y_A = y_0 + y_P = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x} - 5x - 3}}$$

2. $$\underline{\underline{y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3}}$$ Gl.(1/2)

Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} y_P &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ y_P' &= 2a_2 x + a_1 \\ y_P'' &= 2a_2 \end{aligned}\right\}$$ in die Gl.(1/2) eingesetzt

$$2a_2 + 2a_2 x + a_1 - 2\left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) \mathrel{\hat{=}} x^2 - 4x + 3$$

$$-2a_2 x^2 + \left(2a_2 - 2a_1\right)x + \left(2a_2 + a_1 - 2a_0\right) \mathrel{\hat{=}} x^2 - 4x + 3$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{cases} -2a_2 & & & = 1 \\ 2a_2 & - 2a_1 & & = -4 \\ 2a_2 & + a_1 & - 2a_0 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{1}{2} \\ a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_0 = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Damit ist: $$y_P = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

Die allg. Lösung der DGL ($y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3$) ist

$$\underline{\underline{y_A = y_0 + y_P = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}}}$$

3. Wenn die Störfunktion $g(x)$ eine Exponentialfunktion ist

$$g(x) = e^{c \cdot x}$$

In der Tabelle Kap. 11.5.1.2 Punkt 2

Unser Beispiel heißt dann

$$\underline{\underline{y'' + y' - 2y = 3 \cdot e^{4 \cdot x}}} \qquad \text{Gl.(1)}$$

je nachdem welchen Wert c bei e^{cx} hat, wählen wir den entsprechenden Lösungsansatz.
Hierfür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

Die charakteristische Gleichung

$$l^{2} + l - 2 = 0$$

hat die Lösungen $l_1 = 1$ und $l_2 = -2$

d.h. $c = 4$ ist keine Lösung der charakt. Gleichung.
In diesem Fall heißt der Lösungsansatz:
(Tabelle Kap. 11.5.1.2 Punkt 2/1)

$$\text{damit in Gl.(1)} \quad \begin{cases} y_P = A \cdot e^{4 \cdot x} \\ y_P' = 4 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} \\ y_P'' = 4 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} \cdot 4 = 16 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} \end{cases}$$

mit dem unbekannten Parameter A, der gefunden werden muß.

$$16 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} + 4 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} - 2 \cdot A \cdot e^{4 \cdot x} = 3 \cdot e^{4 \cdot x}$$

$$18 \cdot A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad y_P = \frac{1}{6} \cdot e^{4 \cdot x}$$

$$\underline{\underline{y_A = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x} + \frac{1}{6} \cdot e^{4 \cdot x}}}$$

4. $g(x) = e^{cx}$ ist wieder eine Exponentialfunktion
diesmal in der Form

$$g(x) = 6\, e^{x}$$

Unser Rechenbeispiel heißt dann:

$$\underline{\underline{y'' + y' - 2y = 6 \cdot e^{x}}} \qquad \text{Gl.(1)}$$

d.h. $c = 1$ ist <u>eine</u> einfache Lösung der charakt. Gleichung.

$$l^{2} + l - 2 = 0$$

In diesem Fall heißt der Lösungsansatz
(Tabelle Kap. 11.5.1.2 Punkt 2/2)

$$\text{in Gl.(1)} \begin{cases} y_P = A \cdot x \cdot e^{x} \\ y_P' = A \cdot (e^{x} + x \cdot e^{x}) = e^{x} \cdot (A + A \cdot x) \\ y_P'' = e^{x} \cdot (A + A \cdot x) + e^{x} \cdot A = e^{x} \cdot (2 \cdot A + A \cdot x) \end{cases}$$

$$e^{x} \cdot (2 \cdot A + A \cdot x) + e^{x} \cdot (A + A \cdot x) - 2 \cdot A \cdot x \cdot e^{x} = 6 \cdot e^{x}$$

$$2 \cdot A + A \cdot x + A + A \cdot x - 2 \cdot A \cdot x = 6$$

$$3 \cdot A = 6 \quad \Rightarrow \quad A = 2 \quad \Rightarrow \quad y_P = 2 \cdot x \cdot e^{x}$$

Allg. Lösung der Gl.(1) lautet:

$$y_A = y_0 + y_P = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x} + 2 \cdot x \cdot e^{x}$$

$$\underline{\underline{y_A = (C_1 + 2 \cdot x) \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x}}}$$

5. $g(x) = x\, e^x$

Wenn die Störfunktion $g(x)$ aus dem Polynom $P_1(x) = (ax + b)$ und der e^x - Funktion besteht, heißt in Wirklichkeit die Störfunktion:

$$g(x) = P_n(x) \cdot e^{c \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$$

oder

$$g(x) = P_n(x) \cdot e^{c \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$$

Der sin- oder cos-Term sind hierbei bei $g(x)$ nicht enthalten.

Bei solcher $g(x)$ gibt es zwei Fälle:

- $c + jb$ ist <u>keine</u> Lösung der charakt. Gleichung
- $c + jb$ ist <u>eine</u> Lösung der charakt. Gleichung

$$\underline{\underline{y'' + y' - 2y = x \cdot e^x}} \qquad \text{Gl.(1)}$$

Wie ist es bei unserem Beispiel?

Die charakt. Gleichung $l^2 + l - 2 = 0$ hat zwei Lösungen:

$l_1 = 1$ und $l_2 = -2$

$c = 1$ ist eine Lösung der charakt. Gleichung.

Also $c + jb = 1$ $\Rightarrow$ d.h. $b = 0$

$n = 1$, da $P_n(x) = x$ $\Rightarrow$ $P_1(x) = a_1 x + a_0$

Damit heißt der Lösungsansatz
(Tabelle Kap. 11.5.1.2 Punkt 4/2)

$$y_P = x \cdot e^{c \cdot x} \cdot \left[Q_n(x) \cdot \sin(b \cdot x) + R_n(x) \cdot \cos(b \cdot x) \right]$$

für unser Beispiel:

$$y_P = x \cdot e^x \cdot \left[Q_1(x) \cdot \sin(0 \cdot x) + R_1(x) \cdot \cos(0 \cdot x) \right]$$

$$y_P = x \cdot e^x \cdot \left(R_1(x) \cdot \cos 0 \right)$$

$$y_P = x \cdot e^x \cdot R_1(x) \qquad ; \qquad R_1(x) = a_1 x + a_0$$

$\boxed{y_P = x \cdot e^x \cdot \left(a_1 x + a_0 \right)}$ Vorsicht !!! Ableitung von 3 Fkt.

besser:

$$\begin{cases} y_p = e^x \cdot \left(a_1 x^2 + a_0 x \right) \\ y_P' = e^x \cdot \left(a_1 x^2 + a_0 x \right) + e^x \cdot \left(2a_1 x + a_0 \right) = \\ \quad\; = e^x \cdot \left(a_1 x^2 + 2a_1 x + a_0 x + a_0 \right) \\ y_P'' = e^x \cdot \left(a_1 x^2 + 2a_1 x + a_0 x + a_0 \right) + e^x \cdot \left(2a_1 x + 2a_1 + a_0 \right) = \\ \quad\; = e^x \cdot \left(a_1 x^2 + 4a_1 x + a_0 x + 2a_1 + 2a_0 \right) \end{cases}$$

$$e^x \cdot \left(a_1 x^2 + 4a_1 x + a_0 x + 2a_1 + 2a_0 \right) + e^x \cdot \left(a_1 x^2 + 2a_1 x + a_0 x + a_0 \right) -$$

$$-2 \cdot e^x \cdot \left(a_1 x^2 + a_0 x \right) = x \cdot e^x$$

Nach <u>Division</u> durch e^x und <u>Ordnen</u> der Glieder folgt:

$$6a_1 x + 3a_0 + 2a_1 = x$$

<u>Koeffizientenvergleich liefert:</u>

$$\begin{cases} \qquad\quad 6a_1 = 1 \\ 3a_0 + 2a_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{6} \quad , \quad a_0 = -\frac{1}{9}$$

Somit ist

$$y_P = e^x \cdot \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)$$

eine partikuläre Lösung.

Allg. Lösung der Gl.(1) lautet:

$$y_A = y_0 + y_P = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right) \cdot e^x$$

$$\underline{\underline{y_A = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x + C_1\right) \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2 \cdot x}}}$$

6. $g(x) = 3 \sin(2x)$

Wir gehen wieder in die Tabelle Kap. 11.5.1.2 und unter Punkt 3 links sehen wir die entsprechende Störfunktion $g(x)$.

Die Gl.(1) heißt:

$$\underline{\underline{y'' + y' - 2y = 3 \cdot \sin(2x)}} \qquad \text{Gl.(1)}$$

Sie hat die Lösungen der charakt. Gleichung

$$l^2 + l - 2 = 0$$

$$l_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad l_2 = -2$$

Es sind zwei reelle Lösungen, damit ist jb als konjugiert komplexe Lösung keine Lösung dieser Gleichung.

$$jb \mathrel{\hat{=}} j \cdot 2 \qquad \text{da} \qquad b = 2 \qquad \text{ist}$$

Damit heißt der Lösungsansatz
(Tabelle Kap. 11.5.1.2 Punkt 3/1):

$$y_P = A \cdot \sin(b \cdot x) + B \cdot \cos(b \cdot x)$$

damit in Gl.(1) $\left\{ \begin{aligned} y_P &= A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) \\ y_P' &= 2 \cdot A \cdot \cos(2x) - 2 \cdot B \cdot \sin(2x) \\ y_P'' &= -4 \cdot A \cdot \sin(2x) - 4 \cdot B \cdot \cos(2x) \end{aligned} \right.$

$$-4 \cdot A \cdot \sin(2x) - 4 \cdot B \cdot \cos(2x) + 2 \cdot A \cdot \cos(2x) - 2 \cdot B \cdot \sin(2x) -$$

$$-2 \cdot A \cdot \sin(2x) - 2 \cdot B \cdot \cos(2x) = 3 \cdot \sin(2x)$$

Ordnen der Glieder nach Sinus- und Kosinusfunktion

$$(-6\cdot A-2\cdot B)\cdot\sin(2x)+(2\cdot A-6\cdot B)\cdot\cos(2x)=3\cdot\sin(2x)$$

<u>Koeffizientenvergleich liefert:</u>

$$\begin{cases} -6A - 2B = 3 \\ 2A - 6B = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{9}{20} \quad ; \quad B=-\frac{3}{20}$$

Die partikuläre Lösung lautet:

$$y_P=-\frac{9}{20}\cdot\sin(2x)-\frac{3}{20}\cdot\cos(2x)$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\underline{\underline{y_A=y_0+y_P=C_1\cdot e^{x}+C_2\cdot e^{-2\cdot x}-\frac{9}{20}\cdot\sin(2x)-\frac{3}{20}\cdot\cos(2x)}}$$