10.3 Rohrströmung

10.3.1 Druckverlust in Rohrleitungen bei laminarer Strömung (Re < 2320)

Bei laminarer Rohrströmung läßt sich der Reibungsverlust theoretisch berechnen, was bei der turbulenten Strömung nicht mehr der Fall ist.

Im Bild 10.6. ist eine waagerechte Rohrleitung mit kreisförmigen Querschnitt dargestellt.

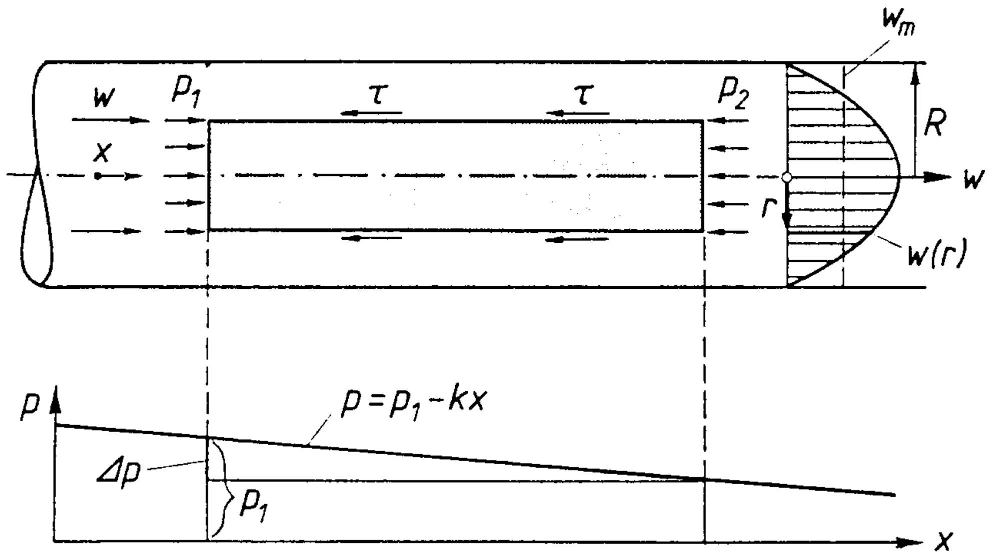

Abb. 10.3.1 Rohrströmung

Wir betrachten einen von der ausgebildeten Rohrströmung herausgeschnittenen gedachten Teilzylinder mit dem Radius r und der Länge L und bringen an ihm die Schubspannungen und Druckkräfte an.

Der Druck nimmt linear in Strömungsrichtung ab, da der infolge Reibung entstehende Druckabfall überwunden werden muß. Bei stationärer Strömung muß der Flüssigkeitszylinder im Gleichgewicht sein. Druck- und Reibungskräfte müssen sich das Gleichgewicht halten.

Druckkraft:

$$\left(p_1 - p_2\right) \cdot A = \left(p_1 - p_2\right) \cdot p \cdot r^2 \qquad (10.3.1)$$

Reibungskraft:

$$2 \cdot p \cdot r \cdot l \cdot t = 2 \cdot p \cdot r \cdot l \cdot h \cdot \frac{dw}{dr} \qquad (10.3.2)$$

Für τ Kap. 5 STL.

Durch Gleichsetzen der beiden Kräfte erhält man folgende, die Geschwindigkeitsverteilung beschreibende Differentialgleichung:

$$\left(p_1 - p_2\right) \cdot p \cdot r^2 = 2 \cdot p \cdot r \cdot l \cdot h \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \qquad (10.3.3)$$

$$\mathrm{d}w = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot h \cdot l} \cdot r \cdot \mathrm{d}r \qquad (10.3.4)$$

$$w = \int_r^R \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot h \cdot l} \cdot r \cdot \mathrm{d}r \qquad (10.3.5)$$

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot h \cdot l} \cdot r \Big|_r^R \qquad (10.3.6)$$

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot h \cdot l} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \qquad (10.3.7)$$

$$w_{\max} = w(0) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot h \cdot l} \cdot R^2 \qquad (10.3.8)$$

$$w_{mit} = \frac{1}{2} w_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot h \cdot l} \cdot R^2 = \frac{p_1 - p_2}{32 \cdot h \cdot l} \cdot D^2 \qquad (10.3.9)$$

$$w_{mit} = w_m \qquad (10.3.10)$$

Aus der Gleichung (10-3-9) kann man den Druckverlust bei laminarer Strömung bestimmen.

$$p_1 - p_2 = \Delta p_v = \frac{32 \cdot w_m \cdot h \cdot l}{D^2} \qquad (10.3.11)$$

Der Volumenstrom $\dot{V}$ errechnet sich aus:

$$\dot{V} = w_m \cdot A = p \cdot R^2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot h \cdot l} \cdot R^2 = \frac{p \cdot R^4 \cdot \left(p_1 - p_2\right)}{8 \cdot h \cdot l} \qquad (10.3.12)$$

Das Durchflußvolumen $\dot{V}$ ist proportional zum Druckunterschied zwischen Rohranfang und Rohrende und zur 4.Potenz des Rohrradius und umgekehrt proportional zur Rohrlänge und zur dynamischen Zähigkeit des Strömungsmediums (Hagen-Poiseuillesches Gesetz).

Daraus ergibt sich der Druckverlust Δp:

$$\Delta p = \frac{8 \cdot h \cdot l \cdot \dot{V}}{p \cdot R^4} = \frac{128 \cdot h \cdot l \cdot \dot{V}}{p \cdot D^4} \qquad (10.3.13)$$

mit $\dot{V} = w_m \cdot A = w_m \cdot \frac{p}{4} \cdot D^2$ (10.3.14)

resultiert

$$\Delta p = \frac{128 \cdot h \cdot l \cdot D^2}{D^4 \cdot 4} \cdot w_m \qquad (10.3.15)$$

$$\Delta p = \frac{64 \cdot h \cdot l}{2 \cdot D^2} \cdot w_m \qquad (10.3.16)$$

$$h = r \cdot n \qquad (10.3.17)$$

$$\Delta p = \frac{64 \cdot r \cdot n \cdot l}{2 \cdot D^2} \cdot w \qquad (10.3.18)$$

$$\Delta p = 64 \cdot \left(\frac{l}{D}\right) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) \cdot w^2 \cdot \left(\frac{n}{D \cdot w}\right) \qquad (10.3.19)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} = \left(\frac{n}{D \cdot w}\right) \qquad (10.3.20)$$

$$\Delta p = \frac{64}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{r}{2} \cdot w^2 \qquad (10.3.21)$$

$\frac{64}{\mathrm{Re}} = l$ dabei ist λ - Rohrreibungszahl (10.3.22)

Es ergibt sich der Druckverlust gerader Rohrleitungsteile wie folgt:

$$\Delta p = l \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{r}{2} \cdot w^2 \qquad (10.3.23)$$

10.3.2 Rohrreibungszahl l

Als Maß für die Dissipation in der Rohrströmung ist die Rohrreibungszahl λ eingeführt worden.

Die Abhängigkeit der Rohrreibungszahl λ von der Reynold-Zahl Re ist im Rohrwiderstandsdiagramm dargestellt. Dabei ist auch der Einfluß der Wandrauhigkeit aufgenommen. Diese ist durch die Rauhigkeitshöhe k_S gekennzeichnet.

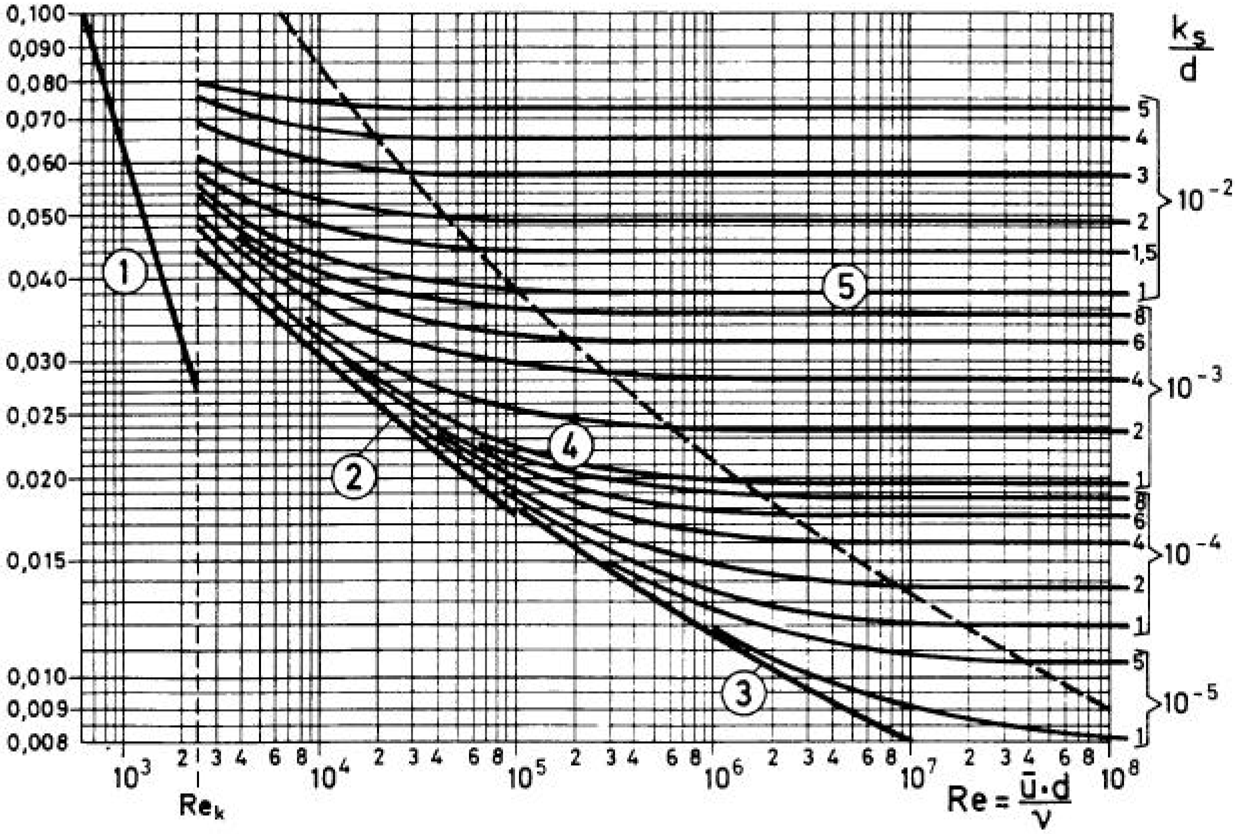

Abb. 10.3.2 Rohrreibungszahl

Im Diagramm sind zwei Hauptbereiche, für laminare und turbulente Strömung, dargestellt. Es werden fünf Kurvenbereiche unterschieden.

Die Formeln für die Berechnung der Rohrreibungszahl λ lauten:

1.Hagen-Poiseuille $$l = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (10.3.24)$$

laminar — hydraulisch glatt — Re<2320

2.Blasius $$l = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} \qquad (10.3.25)$$

turbulent — hydraulisch glatt — $2320<\mathrm{Re}<10^5$

3.Prandtl $$\frac{1}{\sqrt{l}} = 2 \cdot \log\left(\mathrm{Re} \cdot \sqrt{l}\right) - 0,9 \qquad (10.3.26)$$

turbulent — hydraulisch glatt — $10^5<\mathrm{Re}<10^7$

4.Colebrook $$\frac{1}{\sqrt{l}} = 1,74 - 2 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot k_s}{d} + \frac{18,7}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{l}}\right) \qquad (10.3.27)$$

turbulent — mit Rauhigkeit

5.v.Karman-Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{l}} = 1,74 - 2 \cdot \log \cdot \frac{2 \cdot k_s}{d} \qquad (10.3.28)$$

turbulent — mit Rauhigkeit

Kurve 1 entspricht der laminaren Strömung $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{kr}$

Die Kurven 2 und 3 gelten, wenn die Rauhigkeit keinen Einfluß hat, bei Kurve 2 bis $\mathrm{Re} = 10^5$.

Oberhalb von Re = 10^5 gilt die Kurve 3. Die Rauhigkeit ist so klein, daß sie den Rohrwiderstand nicht beeinflußt. Man bezeichnet die Wand dann als **hydraulisch glatt**. Ist die Rauhigkeit k_S groß genug um die Rohrreibung zu beeinflussen, sind wieder zwei Bereiche zu unterscheiden.

Im Bereich 4 hängt λ sowohl von der Reynolds-Zahl als auch von der relativen Sandrauhigkeit k_S/d ab.

10.3.3 Druckverluste in Rohrreibungselementen

10.3.3.1 Grundgleichung

$$\Delta p_v = z \cdot \frac{r}{2} \cdot w^2 \qquad (10.3.29)$$

10.3.3.2 Plötzliche, sprungartige Rohrerweiterung

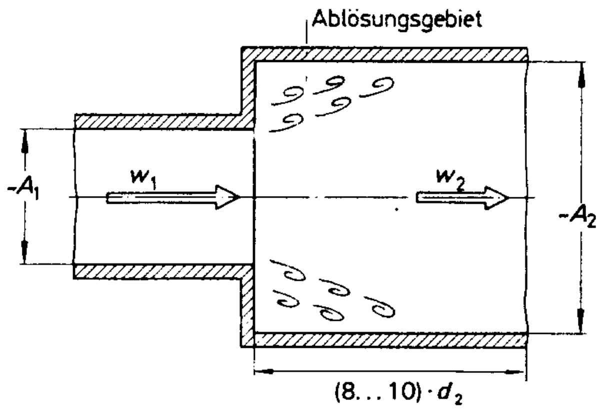

Abb. 10.3.3 Rohrerweiterung

Der Druckabfall in einer sprungartigen Rohrerweiterung ist folgendermaßen definiert:

$$\Delta p_v = \frac{r}{2} \cdot \left(w_1 - w_2\right)^2 \qquad (10.3.30)$$

Setzt man die obige Gleichung mit der Grundgleichung

$$\Delta p_v = z_2 \cdot \frac{r}{2} \cdot w_2^2 \qquad (10.3.31)$$

gleich, so erhält man den folgenden Ausdruck für ζ_2:

$$z_2 \cdot \frac{r}{2} \cdot w_2^2 = \frac{r}{2} \cdot \left(w_1 - w_2\right)^2 \qquad (10.3.32)$$

$$w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot w_2 \qquad (10.3.33)$$

$$z_2 \cdot w_2 = \left(w_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} - w_2 \right)^2 \qquad (10.3.34)$$

$$z_2 \cdot w_2^2 = w_2^2 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \qquad (10.3.35)$$

$$z_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \qquad (10.3.36)$$

Diese Gleichung stellt die Widerstandszahl ζ_2 einer plötzlichen Rohrerweiterung dar, bezogen auf die Geschwindigkeit w_2 im erweiterten Rohrteil.

10.3.3.3 Plötzliche, sprungartige Rohrverengung

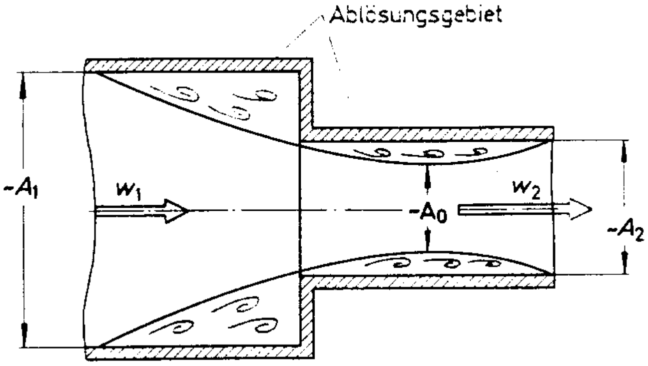

Abb. 10.3.4. Rohrverengung

Der Druckabfall ergibt sich zu:

$$\Delta p_v = z_2 \cdot \frac{r}{2} \cdot w_2^2 \tag{10.3.37}$$

und

$$z_2 = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1 \right)^2 \tag{10.3.38}$$

A_0 - Strahlkontraktion an der Verengungsstelle

10.3.3.4 Allmähliche Rohrerweiterung (Diffusor) und allmähliche Rohrverengung (Konfusor, Düse)

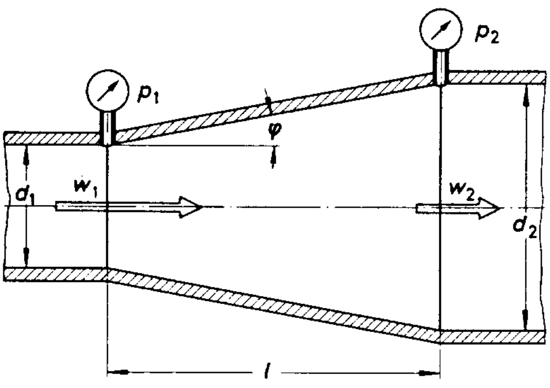

Abb. 10.3.5 Rohrerweiterung

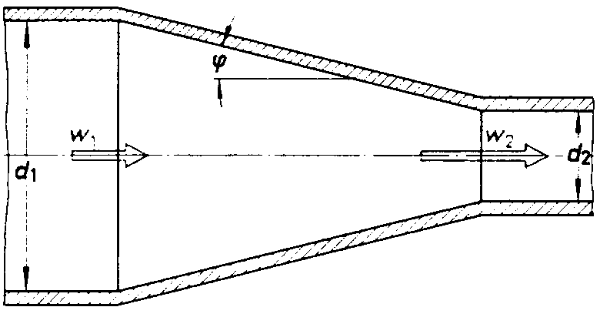

Abb. 10.3.6 Rohrverengung

Die Reibungsverluste werden in einem Diffusor oder in einer Düse durch einen ζ - Wert erfaßt.

$$z_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \qquad (10.3.39)$$

Die Widerstandszahl ζ ist eine Funktion

- der Rohrrauhigkeit,
- der Reynolds-Zahl,
- des Winkels φ und
- des Durchmesserverhältnisses d_1/d_2.