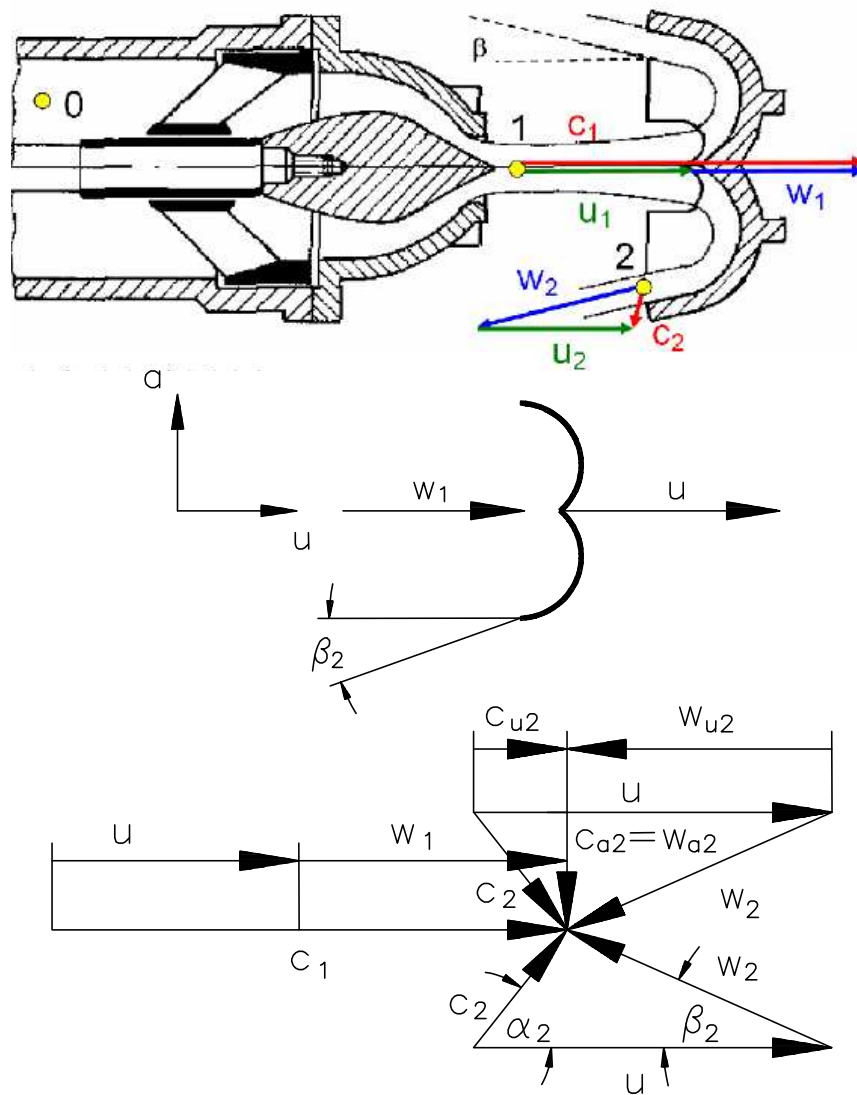


3.2. Strömungstechnische Auslegung der PELTON Turbine

3.2.1. Geschwindigkeitsdreieck



- Legende: a - Axiale Richtung
u – Umfangsrichtung
c - Absolutgeschwindigkeit des Strahls nach der Düse = vor Laufrad
u - Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades
w - Relativgeschwindigkeit des Strahls
 β_2 - Abströmwinkel
- Indizes: 1 - nach der Düse bzw. vor dem Laufrad
2 - nach dem Laufrad
a – Axialkomponente
u - Umfangskomponente

Abbildung 3.2-1: Geschwindigkeitsplan im Becher einer Peltonturbine

3.2.2. Ideale Düsenaustrittsgeschwindigkeit

In einem Leitapparat, der aus mehreren Düsen besteht, wird ein Wasserstrahl mit hoher Geschwindigkeit erzeugt, der durch seine Impulsänderung beim Auftreten auf die Schaufeln eine Kraft ausübt und das Laufrad in Bewegung versetzt.

Nach dem Energiesatz für offene Systeme bei Vernachlässigung von Verlusten (und Höhenunterschieden) in der Düse bei einem Düsenaustrittsdruck p_1 , der gleich dem Umgebungsdruck ist, folgt:

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_0 = \frac{c_{1\max}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \quad (3.2-1)$$

- c_0 - Düseneintrittsgeschwindigkeit
- p_0 - Druck am Düseneintritt
- z_0 - geodätische Höhe des Düseneintritts
- $c_{1\max}$ - Düsenaustrittsgeschwindigkeit (ideal)
- p_1 - Druck am Düsenaustritt
- z_1 - geodätische Höhe des Düsenaustritts
- ρ - Dichte des Mediums
- g - Erdbeschleunigung

Damit ergibt sich für eine ideale Düsenaustrittsgeschwindigkeit unter den Voraussetzungen eines adiabaten offenen Systems ($q_{01}=0$; Temperatur = const) und eines inkompressiblen Mediums ($\Delta\rho=0$) folgende Gleichung:

$$c_{1ideal} = \sqrt{c_0^2 + 2 \left[\frac{p_0 - p_1}{\rho} + g(z_0 - z_1) \right]} \quad (3.2-2)$$

3.2.3. Düsenaustrittsgeschwindigkeit

In Wirklichkeit treten beim Durchströmen der Düse Reibungsverluste auf (Φ_{01} - Spezifische Dissipationsarbeit in der Düse), die zu einer Strahlaustrittsgeschwindigkeit $c_{1\text{real}}$

$$c_{1\text{real}} < c_{1\text{ideal}}$$

führen und die am einfachsten durch den Düsenwirkungsgrad η_D oder die spezifische Dissipation erfasst werden.

Die spezifischen Verluste in der Düse lassen sich in die verlustbetrachtende Bernoulligleichung zwischen Düsenein- und -austritt einbeziehen:

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_0 = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \Phi_{01} \quad (3.2-3)$$

Daraus folgt:

$$c_{1real} = \sqrt{c_0^2 + 2 \left[\frac{p_0 - p_1}{\rho} + g(z_0 - z_1) - \Phi_{01} \right]} \quad (3.2-4)$$

Φ_{01} - Spezifische Dissipationsarbeit in der Düse

3.2.4. Spezifische Dissipationarbeit Φ_{01} in der Düse

Dissipation ist die Umwandlung einer Energieform in Wärmeenergie, d.h. in diesem Fall die Umwandlung der kinetischen Energie in Reibungswärme an der Wandung der Düse.

Für den Wirkungsgrad der Düse ergibt sich nach der allgemeinen Wirkungsgradgleichung:

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} \quad (3.2-5)$$

η - Wirkungsgrad, allgemein

Die Aufgabe der Düse bei der Pelton-turbine besteht darin das vorhandene Gefälle möglichst vollständig in Geschwindigkeit umzusetzen. Das heißt die Geschwindigkeitsdifferenz entspricht dem Nutzen.

Dazu noch einmal die Bernoulligleichung zwischen Düsenein- und -austritt ohne Verlustbetrachtung mit c_{1ideal} :

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_0 = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \quad (3.2-6)$$

Beim Wirkungsgrad $\eta = 1$ würde folgende Beziehung entstehen:

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_0 - z_1) = \frac{c_{1ideal}^2 - c_0^2}{2} \quad (3.2-7)$$

Für einen realen Wirkungsgrad ergibt sich der Quotient:

$$\eta_D = \frac{\frac{c_{1real}^2 - c_0^2}{2}}{\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho} + g \cdot (z_0 - z_1)} \dots \left(\frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} \right) \quad (3.2-8)$$

η_D - Wirkungsgrad der Düse
 Hieraus kann c_{1real} berechnet werden

Wenn $\text{Nutzen} = \eta_D \cdot \text{Aufwand}$ ist, dann folgt daraus für die Verluste in der Düse:

$$\text{Verlust} = (1 - \eta_D) \cdot \text{Aufwand}$$

Für die spezifische Dissipation in der Düse heißt dies:

$$\Phi_{01} = (1 - \eta_D) \left[\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho} + g(z_0 - z_1) \right] \quad (3.2-9)$$

3.2.5. Umfangsgeschwindigkeit

Unter der Umfangsgeschwindigkeit versteht man die Punktgeschwindigkeit auf dem Strahlkreisdurchmesser am Laufrad.

$$u = r \cdot \omega = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n \quad (3.2-10)$$

ω - Winkelgeschwindigkeit
 r - Strahlkreisradius
 n - Drehzahl

3.2.6. Relative Laufradeintrittsgeschwindigkeit, w_1

Für einen Beobachter, der sich auf dem Laufrad befindet, hat der Wasserstrahl eine Relativgeschwindigkeit w_1 . Weil sich das Laufrad mit der Umfangsgeschwindigkeit u in die gleiche Richtung wie der Wasserstrahl bewegt, trifft der Wasserstrahl auf die Laufschaufeln nur mit der Relativgeschwindigkeit w_1 . Die relative Laufradeintrittsgeschwindigkeit ist die Differenz der Absolutgeschwindigkeit des Strahls und der Umfangsgeschwindigkeit, d.h. sie ist der Teil der Absolutgeschwindigkeit der "schneller" ist als das Laufrad und den eigentlichen Impuls (die Umfangskomponente) erzeugt.

$$w_1 = c_1 - u \quad (3.2-11)$$

w_1 - Relative Laufradeintrittsgeschwindigkeit des Strahles
 c_1 - Absolute Laufradeintrittsgeschwindigkeit des Strahles
 u - Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades

3.2.7. Relative Laufradaustrittsgeschwindigkeit, w_2

Die Schaufeln sind auf der Frontseite so geformt, dass der Wasserstrahl nach beiden Seiten umgelenkt wird und das Laufrad mit der Geschwindigkeit w_2 verlässt.

Verständlicherweise treten bei dieser Umlenkung Verluste auf, so dass wegen des gleichen Druckes $p_2 = p_1$ die Geschwindigkeit w_2 etwas kleiner als w_1 ist. Dieses Geschwindigkeitsverhältnis wird mit dem Beiwert ξ erfasst. Der Druck ist im Laufradeintritt gleich dem Druck im Laufradaustritt.

Die relative Geschwindigkeit nach dem Laufrad w_2 ist gleich:

$$w_2 = \xi \cdot w_1 \quad (3.2-12)$$

w_2 - Relative Laufradaustrittsgeschwindigkeit des Strahles
 ξ - Geschwindigkeitsverhältnis

3.2.8. Umfangskomponente der relativen Laufradaustrittsgeschwindigkeit

Mit dieser Geschwindigkeitskomponente wird der Teil der relativen Laufradgeschwindigkeit erfasst, der auf dem Umfang entgegen der Laufradbewegungsrichtung wirkt. Die trigonometrische Beziehung wird aus dem Geschwindigkeitsplan (Abbildung 3.3.1) ersichtlich.

$$\cos \beta_2 = \frac{-w_{u2}}{w_2} \Rightarrow w_{u2} = -\cos \beta_2 \cdot w_2 \quad (3.2-13)$$

w_{2u} - Umfangskomponente der relativen Austrittsgeschwindigkeit des Strahles.
Minus bedeutet eine Gegenrichtung zu u
 β_2 - Laufradabströmwinkel

3.2.9. Axiale Komponente der absoluten Laufradaustrittsgeschwindigkeit

Geschwindigkeitskomponente die sich durch Symmetrie des Laufradbeckers gegeneinander aufheben und somit auch keine Axialkraft erzeugen. Durch die Geschwindigkeit c_{a2} wird das Wasser von der Schaufel abgeführt.

$$\begin{aligned} \sin \beta_2 &= \frac{w_{a2}}{w_2} \Rightarrow w_{a2} = \sin \beta_2 \cdot w_2 \\ \sin \beta_2 &= \frac{c_{a2}}{w_2} \Rightarrow c_{a2} = \sin \beta_2 \cdot w_2 \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

c_{a2} - Axialkomponente der absoluten Laufradaustrittsgeschwindigkeit

3.2.10. Umfangskomponente der absoluten Laufradaustrittsgeschwindigkeit

Es gilt allgemein:

$$u = -w_{u2} + c_{u2} \Rightarrow c_{u2} = u + (-w_{u2}) \quad (3.2-15)$$

c_{u2} - Umfangskomponente der absoluten Laufradaustrittsgeschwindigkeit

3.2.11. Absolute Laufradaustrittsgeschwindigkeit

Die absolute Laufradaustrittsgeschwindigkeit des Strahls errechnet sich mit dem Satz des PYTHAGORAS aus dem Geschwindigkeitsplan:

$$c_2 = \sqrt{c_{a2}^2 + c_{u2}^2} \quad (3.2-16)$$

c_2 - Absolute Laufradaustrittsgeschwindigkeit

3.2.12. Spezifische Dissipationsarbeit im Laufrad und Laufrad-Verlustbeiwert

Die spezifische Dissipationsarbeit im Laufrad kann entweder als Differenz der kinetischen Energie der Relativgeschwindigkeiten oder mittels eines Verlustfaktors beschrieben werden. Dazu lautet die Bernoulli-Gleichung zwischen Laufradein- und -austritt unter Beachtung der Verluste:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + \Phi_{12} \quad (3.2-17)$$

mit $p_1=p_2$ und $z_1=z_2$ folgt daraus:

$$\Phi_{12} = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \quad (3.2-18)$$

Φ_{12} - Spezifische Dissipationsarbeit im Laufrad

Als Anteil an der kinetischen Energie ergibt sich wiederum für die spezifische Dissipationsarbeit im Laufrad mit dem Laufrad-Verlustbeiwert ζ :

$$\Phi_{12} = \zeta \cdot \frac{w_1^2}{2} \quad (3.2-19)$$

ζ - Laufrad-Verlustbeiwert

Mit den Gleichungen (3.1-12), (3.1-18) und (3.1-19) erhält man ein Gleichungssystem:

$$w_2 = \xi \cdot w_1 \quad (3.2-12)$$

$$\Phi_{12} = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \quad (3.2-18)$$

$$\Phi_{12} = \zeta \cdot \frac{w_1^2}{2} \quad (3.2-19)$$

$$\Phi_{12} = \frac{w_1^2}{2} - \xi^2 \frac{w_1^2}{2} \quad (3.2-20)$$

und nach dem Einsetzen von (19) in (18), erhält man:

$$\zeta \frac{w_1^2}{2} = \frac{w_1^2}{2} - \xi^2 \frac{w_1^2}{2} \quad (3.2-21)$$

und Division durch $w_1^2/2$

lautet die Beziehung zwischen ζ und ξ :

$$\zeta = 1 - \xi^2 \quad (3.2-22)$$

3.2.13. Spezifische Dissipationsarbeit nach dem Laufrad

Die Differenz ($z_2 - z_{Ws}$) entspricht dem Abstand zwischen Unterwasserspiegel und dem Austritt des Wassers aus dem Laufrad. Sie stellt ein ausgefallenes Nutzgefälle dar und muss deshalb so klein wie möglich gehalten werden.

Die Herleitung der spezifischen Dissipationsarbeit nach dem Laufrad aus der Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{c_{Ws}^2}{2} + \frac{p_{Ws}}{\rho} + g \cdot z_{Ws} + \Phi_2 \quad (3.2-23)$$

- c_2 - Absolute Laufradaustrittsgeschwindigkeit
- p_2 - Druck am Laufradaustritt
- z_2 - geodätische Höhe des Laufradaustritts
- c_{W_s} - Geschwindigkeit des Unterwasserspiegels
- p_{W_s} - Druck am Unterwasserspiegel
- z_{W_s} - geodätische Höhe des Unterwasserspiegels
- Φ_2 - Spezifische Dissipationsarbeit nach dem Laufrad

mit $p_2 = p_{W_s}$ und $c_{W_s} = 0$ folgt daraus:

$$\Phi_2 = \frac{c_2^2}{2} + g \cdot (z_2 - z_{W_s}) \quad (3.2-24)$$

3.2.14. Umfangskraft am Laufrad

Der Freistrahle aus der Düse trifft mit der Relativgeschwindigkeit w_1 auf das Laufrad und wird entlang der Schaufelkontur abgelenkt. Die Richtungsänderung der Geschwindigkeit im Laufrad von w_1 auf w_2 bewirkt eine Änderung des Impulses und erzeugt eine Kraft in Umfangsrichtung.

Die Anwendung des Impulssatzes in Axialrichtung **a**:

$$\dot{i}_{ausa} - \dot{i}_{eina} = F_{aS} = \dot{m} \cdot \frac{w_{a1}}{2} + \dot{m} \cdot \frac{w_{a2}}{2} \Rightarrow F_{aS} = 0 \text{ damit } F_a = -F_{aS} = 0 \quad (3.2-25)$$

\dot{i}_a - Impulsstrom in axialer Richtung

mit der Bedingung, dass der eintretende Impuls in Axialer Richtung Null ist.

F_a - Axialkraft, hervorgerufen durch Impuls

w_a - Axialkomponenten der relativen Geschwindigkeit des Strahles

Dabei gilt das Koordinatensystem, dass die Richtung der beiden Komponenten entgegengesetzt ist.

\dot{m} - Massenstrom

Desgleichen für die Umfangsrichtung **u**:

$$\dot{i}_{AusU} - \dot{i}_{EinU} = \sum F_{ext} = F_{uS} \text{ mit } F_u = -F_{uS} \quad (3.2-26)$$

$$\dot{i}_u = F_u = \dot{m} \cdot w_{u1} - \dot{m} \cdot \frac{w_{u2}}{2} - \dot{m} \cdot \frac{w_{u2}}{2}$$

\dot{i}_u - Impulsstrom in Umfangsrichtung

F_u - Umfangskraft, hervorgerufen durch Impuls

Es wird die Kraft vom Fluid auf die Schaufel angenommen und nicht die Kraft von der Schaufel auf das Fluid nach dem Stützkraftkonzept

w_u - Umfangskomponenten der relativen Geschwindigkeit des Strahles

$$F_u = \dot{m} \cdot w_{u1} - \dot{m} \cdot w_{u2} \quad (\text{Wichtig: Richtung von } w_{u2} \text{ berücksichtigt})$$

Es folgt für F_U :

$$F_u = \dot{m} \cdot (w_{u1} - w_{u2}) \quad (3.2-27)$$

Aus der Eulergleichung

$$w_{u1} = w_1 = c_1 - u \quad (3.2-11)$$

Aus der Eulergleichung

$$w_{u2} = c_{u2} - u \quad \text{aus der formalen Lösung } \vec{c}_{u2} = \vec{u} + \vec{w}_{u2} \quad (3.2-15)$$

und damit wird Umfangskraft in die positive Drehrichtung positiv und erzeugt damit die Kraft an dem Laufrad die zur Erzeugung des Drehmomentes führt.

$$F_u = \dot{m} \cdot (c_1 - u - c_{u2} + u) \quad (3.2-28)$$

$$F_u = \dot{m} \cdot (c_1 - c_{u2})$$

3.2.15. Spezifische Schaufelarbeit

Allgemein lautet die Gleichung zur Bestimmung der spezifischen Schaufelarbeit:

$$w_t = \frac{P}{\dot{m}} \quad (3.2-29)$$

w_t - Spezifische technische Arbeit

P - Turbinenleistung

Für die Leistung folgt nach den Grundgesetzen der Mechanik:

$$P = M \cdot \omega \quad (3.2-30)$$

T [Nm] – Drehmoment

ω [1/s] - Winkelgeschwindigkeit

mit

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n = \frac{u}{r} \quad (3.2-31)$$

und

$$M = F_u \cdot r \quad (3.2-32)$$

$$F_u = \dot{m} \cdot (c_1 - c_{u2}) \quad (3.2-28)$$

wird

$$P = M \cdot \omega = F_u \cdot r \cdot \omega = F_u \cdot r \cdot \frac{u}{r} = F_u \cdot u$$

$$P = \dot{m} \cdot u \cdot (c_1 - c_{u2}) \quad (3.2-33)$$

Nach dem Einsetzen in die Gleichung der spezifischen Schaufelarbeit:

$$w_t = u \cdot (c_1 - c_{u2}) \quad (3.2-34)$$

Dabei gilt es zu beachten das die Arbeit aus der Umfangsgeschwindigkeit als positive Arbeit angesehen wird.

Bei der Eulergleichung gilt die Beziehung das die spezifisch technische Arbeit bei Kraftmaschinen negativ angenommen wird und bei Arbeitsmaschinen positiv.

An dem Betrag der Arbeit ändert sich nichts, da es nur mit dem Vorzeichen in dem Energieerhaltungssatz berücksichtigt wird.

3.2.16. Totale Druckänderungsarbeit

Die totale Druckänderungsarbeit ist die einer Turbine zwischen Eingangs- und Ausgangsstutzen entzogene spezifische technische Arbeit.

Der "Eingangsstutzen" der PELTON-Turbine ist der Düseneintritt, als "Ausgangsstutzen" ist der Unterwasserspiegel im Kraftwerkshaus zu sehen.

(0) ⇒ UWS

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_0 - Y_t = \frac{c_{Ws}^2}{2} + \frac{p_{Ws}}{\rho} + g \cdot z_{Ws} \quad (3.2-35)$$

Y_t - Totale Druckänderungsarbeit

$$Y_t = \frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0 - p_{Ws}}{\rho} + g \cdot (z_0 - z_{Ws}) \quad (3.2-36)$$

3.2.17. Massenstrom

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.2-37)$$

Auf die Zeit bezogener Massenstrom:

$$m = V \cdot \rho \quad | \div t \quad (3.2-38)$$

m - Masse
V - Volumen
t - Zeit

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho \quad (3.2-39)$$

\dot{V} - Volumenstrom

3.2.18. Turbinenleistung

$$P_T = \dot{m} \cdot w_t \quad (3.2-40)$$

3.2.19. Kupplungsleistung

$$P_K = \dot{m} \cdot \eta_m \cdot w_t \quad (3.2-41)$$

P_K - Kupplungsleistung
 η_m - Mechanischer Wirkungsgrad

3.2.20. Exergetischer Wirkungsgrad

Der exergetische Wirkungsgrad drückt aus, welcher Anteil der zur Verfügung stehenden Exergie tatsächlich in nutzbare Arbeit umgewandelt werden kann.

Dabei spielt die spezifische Arbeit aus 3.2-34 eine Rolle. Der exergetische Wirkungsgrad wird in diesem Fall positiv wenn die spezifisch technische Arbeit positiv angenommen wird.

$$\eta_{xT} = \frac{w_t}{(\text{Exergie})} \quad (3.2-42)$$

η_{xT} - Exergetischer Wirkungsgrad

mit

$$P_K = \dot{m} \cdot \eta_m \cdot w_t \quad (3.2-43)$$

$$w_t = u \cdot (c_1 - c_{u2}) \quad (3.2-44)$$

lautet wird η_{xT} zu:

$$\eta_{xT} = \frac{u \cdot (c_1 - c_{u2})}{\left(\frac{c_1^2}{2}\right)_{ideal}} \quad (3.2-45)$$

und für $\left(\frac{c_1^2}{2}\right)_{ideal}$ folgt aus der Bernoulli-Gleichung zwischen Düsen Eintritt und

Laufradeintritt:

(0) \Rightarrow (1)

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot z_0 = \left(\frac{c_1^2}{2}\right)_{ideal} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \quad (3.2-46)$$

$$\left(\frac{c_1^2}{2}\right)_{ideal} = \frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_0 - z_1) \quad (3.2-47)$$

$$\eta_{xT} = \frac{u \cdot (c_1 - c_{u2})}{\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_0 - z_1)} \quad (3.2-48)$$

3.2.21. Optimale Umfangsgeschwindigkeit

Die Umfangsgeschwindigkeit ist dann optimal, wenn der exergetische Wirkungsgrad am größten ist. Mathematisch heißt das, dass die Funktion $\eta_{XT} = f(u_{opt})$ in der 1. Ableitung gleich 0 zu setzen ist, um ein Maximum zu ermitteln:

$$\frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} = 0 \quad (3.2-49)$$

In Formel (3.3.48) werden jetzt die Variablen und Konstanten festgelegt. Man kann feststellen, dass der gesamte Nenner von (u_{opt}) unabhängig ist. Deshalb wird der gesamte Nenner als Konstante definiert.

$$K = \frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0 - p_1}{\rho} + g \cdot (z_0 - z_1) \Rightarrow \eta_{XT} = \frac{u \cdot (c_1 - c_{u2})}{K} \quad (3.2-50)$$

Der Zähler ist eine Funktion von (u_{opt}) da (c_{u2}) von (u_{opt}) abhängt.

$$\frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} = \frac{\partial}{\partial u_{opt}} \left[\frac{u \cdot (c_1 - c_{u2})}{K} \right] = \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial u_{opt}} [u_{opt} \cdot (c_1 - c_{u2})] \quad (3.2-51)$$

Der Ausdruck $[u_{opt}(c_1 - c_{u2})]$ wird im Folgenden umgestellt.

Für die Geschwindigkeit c_{u2} gilt:

$$c_{u2} = w_{u2} + u \quad (3.2-15)$$

$$w_{u2} = -\cos \beta_2 \cdot w_2 \quad (3.2-13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} &= \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial u_{opt}} [u_{opt} \cdot (c_1 - (-\cos \beta_2 \cdot w_2 + u))] \\ \frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} &= \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial u_{opt}} [u_{opt} \cdot (c_1 + \cos \beta_2 \cdot w_2 - u)] \end{aligned} \quad (3.2-52)$$

Durch weiteres Einsetzen von:

$$w_2 = \zeta \cdot w_1 \quad (3.2-12)$$

$$w_1 = c_1 - u_{opt} \quad (3.2-11)$$

$$w_2 = \xi \cdot (c_1 - u_{opt}) \quad (3.2-53)$$

erhält man:

$$c_{u2} = u_{opt} - \cos \beta_2 \cdot \xi \cdot (c_1 - u_{opt})$$

$$c_{u2} = u_{opt} + u_{opt} \cdot \cos \beta_2 \cdot \xi - c_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot \xi \quad (3.2-54)$$

$$c_{u2} = u_{opt} \cdot (1 + \cos \beta_2 \cdot \xi) - c_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot \xi$$

Dies bedeutet für den Zähler in der Gleichung (42) $[u(c_1 - c_{u2})]$:

$$\begin{aligned} u_{opt} \cdot (c_1 - c_{u2}) &= u_{opt} [c_1 - u_{opt} \cdot (1 + \cos \beta_2 \cdot \xi) - c_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot \xi] \\ &= u_{opt} c_1 - u_{opt}^2 \cdot (1 + \cos \beta_2 \cdot \xi) - u_{opt} \cdot c_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot \xi \\ &= -u_{opt}^2 \cdot (1 + \cos \beta_2 \cdot \xi) + u_{opt} c_1 \cdot (1 - \cos \beta_2 \cdot \xi) \\ &= (1 + \cos \beta_2 \cdot \xi) \cdot (u_{opt} c_1 - u_{opt}^2) \end{aligned} \quad (3.2-55)$$

⇒ damit zurück in Formel (3.2-52) für den exergetischen Wirkungsgrad.

Der Term $(1 + \cos \beta_2 \cdot \xi)$ kann als Konstante ausgeklammert werden. Es verbleibt nunmehr zur eigentlichen Differenzierung nur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} &= \frac{\partial}{\partial u_{opt}} \left[\frac{(1 + \cos \beta_2 \cdot \xi) \cdot (u_{opt} c_1 - u_{opt}^2)}{K} \right] \\ &= \frac{(1 + \cos \beta_2 \cdot \xi)}{K} \frac{\partial}{\partial u} (u_{opt} c_1 - u_{opt}^2) \end{aligned} \quad (3.2-56)$$

damit folgt für die Ableitung:

$$\frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} = \frac{(1 + \cos \beta_2 \cdot \xi)}{K} (c_1 - 2 \cdot u_{opt})$$

und

$$\frac{\partial \eta_{XT}}{\partial u_{opt}} = 0$$

$$0 = \frac{(1 + \cos \beta_2 \cdot \xi)}{K} (c_1 - 2 \cdot u_{opt}) \Big| \div \frac{(1 + \cos \beta_2 \cdot \xi)}{K}$$

$$u_{opt} = \frac{c_1}{2} \quad (3.2-57)$$

u_{opt} - Optimale Umfangsgeschwindigkeit

Auswertung: Die optimale Umfangsgeschwindigkeit liegt bei der halben reellen Düsenaustrittsgeschwindigkeit. Beim Abweichen von der optimalen Umfangsgeschwindigkeit sinkt der exergetische Wirkungsgrad. Da die Umfangsgeschwindigkeit aber in die Umfangskraft eingeht, sind ihr aus Festigkeitsgründen Grenzen gesetzt.

3.2.22. Totaler Wirkungsgrad

Der totale Wirkungsgrad berücksichtigt vor allem die in der Turbine auftretenden Reibungsverluste der Strömung. Dabei gilt als Bezug die technische Arbeit w_t . So ist der totale Wirkungsgrad sehr gut zum Vergleich der verschiedenen Turbinen geeignet, da nur die strömungstechnischen Verluste einbezogen werden. Bei inkompressiblen Flüssigkeiten, gilt mit der Beziehung $Y = \Delta p / \rho$:

$$\eta_{xt} = \eta_T$$

$$\eta_T = \frac{w_t}{w_t + \sum \Phi} = \frac{w_t}{Y} = \frac{P}{\dot{m} \cdot Y_t} \quad (3.2-58)$$

$$\eta_T = \frac{w_t}{w_t + (\Phi_{01} + \Phi_{12} + \Phi_2)}$$

η_T - Totaler Wirkungsgrad

Y_t – totale Strömungsarbeit (totale Druckänderungsarbeit)

3.2.23. Kupplungswirkungsgrad

Der Kupplungswirkungsgrad beinhaltet die mechanischen und strömungstechnischen Verluste und beinhaltet den Teil der Leistung die an einem angeschlossenen Generator direkt zur Verfügung stehen.

$$\eta_K = \eta_m \cdot \eta_T \quad (3.2-59)$$

η_K - Kupplungswirkungsgrad