Zum Verfahren der Mittagslänge

Die „Astronomische Navigation“ [1] ist in ihrer ersten Auflage bei den Anhängern traditioneller Navigationsverfahren erfreulich gut aufgenommen worden. Kritische Leserreaktionen gab es zum Verfahren der Mittagslänge, dessen Darstellung hinsichtlich seiner Anwendungsgrenzen offenbar nicht klar genug formuliert war. So heißt es auf S. 86 im vierten Absatz:

Zu bedenken wäre hier, ob man nicht die beiden Höhenmessungen etwas „enger“ als plus/minus zwei Stunden um den Kulminationszeitpunkt legen sollte.

Von Dr. Fritz Mietzsch, dem Erfinder des legendären Rechenschemas[1], kam der Hinweis, daß derartige Aussagen regelmäßig so verstanden werden, als könne man beliebig dicht an die Kulmination heran. Götz-Anders Nietsch von der Seglervereinigung Altona-Oevelgönne äußerte sich ähnlich. Nun, so war obiger Satz natürlich nicht gemeint. Ich hatte vielmehr darauf vertraut, daß eigentlich bei jedem die in Richtung Kulmination immer flacher verlaufende Kurve ein gewisses Unbehagen auslösen sollte. Aber so ist das eben mit der Betriebsblindheit.

Grundlagen

Das Verfahren zur Ermittlung der **Mittagslänge** wird in den meisten Büchern zur Astronomischen Navigation für Sportschiffer vorgestellt – so z. B. in [1], [2], [4], [6], [7] und [9]. In den Navigationslehrbüchern der Berufsseeleute sucht man es hingegen vergebens, obwohl ein historischer Vorläufer in Gestalt der „Methode der gleichen Höhen“ (vgl. [3], §§ 271 - 275) oder der „Zeitbestimmung mit zwei korrespondierenden Höhen“ (vgl. [6], S. 273) existiert. Für dieses Fehlen gibt es einen einfachen Grund: Denn entgegen der sonst gültigen Regel

1’ Höhenfehler bedeutet 1 sm Lagefehler.

kommt es beim Verfahren der Mittagslänge zu einer *Fehlerverstärkung*, die unter Umständen dramatische Ausmaße annehmen kann. Da sich aber keine einfachen Regeln zur Fehlerabschätzung aufstellen lassen, erschien es unseren Altvorderen an den Seefahrtsschulen vernünftig, die Berechnung der Mittagslänge aufgrund gleicher Höhen nicht zu lehren. Eine Entscheidung, die man – das wird in dieser Ergänzung deutlich – auch heute noch vernünftig finden kann.

Was verbirgt sich nun im einzelnen hinter dem Ausdruck „Fehlerverstärkung“?

Sei u eine Größe, die in bekannter Weise von den n (meßbaren) Größen $x_1, \ldots, x_n$ abhänge. Es ist also $u(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben. Dann läßt sich der Einfluß der systematischen Meßfehler $\Delta^f x_1, \ldots, \Delta^f x_n$ auf die Ergebnisgröße u aufgrund des *totalen* (oder *vollständigen*) *Differentials*

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \qquad \text{(vgl. [8], Abschnitt 1.5.10.1)}$$

[1] vgl. [1], Abschnitt C.4

angeben, sofern die Meßfehler hinreichend klein sind. Dann nämlich lassen sich die Differentiale d... näherungsweise durch fehlerbedingte Differenzen Δ^{f}... ersetzen, und man erhält das **Fehlerfortpflanzungsgesetz** für systematische Fehler zu

$$\boxed{\Delta^{\mathrm{f}} u \;=\; \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\Delta^{\mathrm{f}} x_1 \;+\; \dots \;+\; \frac{\partial u}{\partial x_n}\,\Delta^{\mathrm{f}} x_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\Delta^{\mathrm{f}} x_i}\;. \tag{1}$$

Dabei kann man die partiellen Ableitungen $\partial u/\partial x_i$ als **Fehlerverstärkungen** auffassen, mithin als eine Art „Gewichtungsfaktor“, mit dem der jeweilige Meßfehler $\Delta^{\mathrm{f}} x_i$ auf das Ergebnis „durchschlägt“ (vg. [8], Abschnitt 1.5.9).

Was sind partielle Ableitungen? Gewöhnliche Ableitungen sind den meisten noch bekannt. Sie beziehen sich auf Funktionen einer unabhängigen Variablen, wie z. B. $v(x)$. Nach Leibniz schreibt man für deren gewöhnliche Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad \text{oder} \quad v'\,.$$

Ihre anschauliche Bedeutung ist die Steigung der $v(x)$-Kurve an der Stelle x. Die Definition der gewöhnlichen Ableitung lautet

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \;:=\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x)\;-\;v(x)}{\Delta x}\;.$$

Dabei bedeutet der Differenzenquotient auf der rechten Seite die Steigung der Sekanten, welche die $v(x)$-Kurve an den Stellen x und $x+\Delta x$ schneidet.

Partielle Ableitungen beziehen sich dagegen immer auf Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen, wie z. B. $u(x, y, z)$. Deren partielle Ableitungen sind nun so definiert, daß alle unabhängigen Variablen bis auf die, nach der gerade abgeleitet wird, im Grenzübergang festgehalten werden, d. h.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} \;:=\; \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ y,z\,=\,\text{fest}}} \frac{u(x+\Delta x, y, z)\;-\;u(x, y, z)}{\Delta x}\;,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z} \;:=\; \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ x,z\,=\,\text{fest}}} \frac{u(x, y+\Delta y, z)\;-\;u(x, y, z)}{\Delta y}\;,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y} \;:=\; \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ x,y\,=\,\text{fest}}} \frac{u(x, y, z+\Delta z)\;-\;u(x, y, z)}{\Delta z}\;.$$

Das Festhalten der „unbeteiligten“ Variablen gilt aber nur für die Limes-Bildung, danach werden sie wieder „freigelassen“.

Partielles Ableiten funktioniert also genauso wie gewöhnliches Ableiten. Man ignoriert einfach die übrigen Variablen. Die Klammern mit der Angabe der festgehaltenen Größen dürfen weggelassen werden (vgl. z. B. (1)), sofern sich daraus keine Unklarheiten ergeben. Bei technischen Anwendungen ist es aber sinnvoll, sie nicht wegzulassen, da die Symbolik der unabhängigen Variablen dann meist nicht so schön systematisch ist, wie x, y, z oder $x_1, \dots, x_n$. Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen, etwa $u(x, y)$, kann man sich anschaulich als „Funktionsgebirge“ vorstellen. Hier bedeuten $(\partial u/\partial x)_y$ und $(\partial u/\partial y)_x$ die Steigungen im Punkt (x, y) in x- bzw. y-Richtung.

Fehlerverstärkungen

Das Verfahren der Mittagslänge beruht darauf, durch Höhenmessungen den Mittagszeitpunkt und damit den zugehörigen Greenwich-Stundenwinkel zu ermitteln. Letzterer stellt ja nichts anderes als die Westlänge des Bildpunktes dar, mit dem wir uns zum Mittagszeitpunkt auf ein und demselben Meridian befinden. Man spricht daher auch vom Zeitpunkt des **Meridiandurchganges**.

Demnach ist es interessant zu erfahren, wie empfindlich der Greenwich-Stundenwinkel auf Fehler in der Höhe(nmessung) und auf Änderungen bezüglich Position und Deklination so „reagiert“. Dazu ersetzt man in

$$\sin h \;=\; \sin\varphi\,\sin\delta \;+\; \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos t \qquad (2.36)^{[1]} \qquad (2)$$

den Cosinus des vollkreisigen Ortsstundenwinkel durch den des halbkreisigen gemäß $\cos t = \cos t_{\mathrm{E,W}}$ und formt diese zunächst zu

$$\cos t_{\mathrm{E,W}} \;=\; \frac{\sin h \;-\; \sin\varphi\,\sin\delta}{\cos\varphi\,\cos\delta} \qquad (3\,\mathrm{a})$$

um, womit sich dann der halbkreisige **Ortsstundenwinkel** als **Funktion von Höhe, Breite und Deklination** zu

$$\boxed{t_{\mathrm{E,W}}\,(h,\varphi,\delta) \;=\; \arccos\left[\frac{\sin h \;-\; \sin\varphi\,\sin\delta}{\cos\varphi\,\cos\delta}\right]} \qquad (3)$$

ergibt. Diese Funktion ermöglicht es, analog zu (1) die Änderung des Ortsstundenwinkels aufgrund von Fehlern/Änderungen bezüglich Höhe, Breite und Deklination entsprechend

$$\Delta^{\mathrm{f}} t_{\mathrm{E,W}} \;=\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial h}\right)_{\varphi,\,\delta} \Delta^{\mathrm{f}} h \;+\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \varphi}\right)_{h,\,\delta} \Delta^{\mathrm{f}} \varphi \;+\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \delta}\right)_{h,\,\varphi} \Delta^{\mathrm{f}} \delta \qquad (4)$$

anzugeben. Dazu müssen nur die Fehlerverstärkungen in Gestalt der drei partiellen Ableitungen berechnet werden. Als Ausgangspunkt ist allerdings (3 a) praktischer als (3), wie man sich leicht überzeugt (Kettenregel!):

$$\frac{\partial}{\partial h}\Big[\cos t_{\mathrm{E,W}}\Big]_{\varphi,\,\delta} \;=\; \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\sin h \;-\; \sin\varphi\,\sin\delta}{\cos\varphi\,\cos\delta}\right]_{\varphi,\,\delta}$$

$$-\sin t_{\mathrm{E,W}}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial h}\right)_{\varphi,\,\delta} \;=\; \frac{\cos h}{\cos\varphi\,\cos\delta}\,.$$

Die **Fehlerverstärkung** für den **Höhenfehler** folgt somit zu

$$\boxed{\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial h}\right)_{\varphi,\,\delta} \;=\; -\,\frac{\cos h}{\cos\varphi\,\cos\delta\,\sin t_{\mathrm{E,W}}}}\,, \qquad (5)$$

wobei die Höhe im Bedarfsfalle nach (2) zu berechnen und einzusetzen ist. Eine alternative Darstellung zu (5) erhält man, indem man den *Höhenzeitazimut* nach (2.50)[1] zu

$$\cos h \;=\; \frac{\cos\delta\ \sin t}{\sin Z} \;=\; \frac{\cos\delta\ \sin t_{\mathrm{E,W}}}{\pm\ \sin Z}\;, \qquad Z\ \in\ [-90°,\, 90°]$$

umformt und in (5) einsetzt. Aufgrund der Ersetzung des vollkreisigen durch den halbkreisigen Ortsstundenwinkel gemäß $\sin t = \pm\sin t_{\mathrm{E,W}}$ geht allerdings die Information über das Vorzeichen verloren, so daß man sich sinnvollerweise mit

$$\left|\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial h}\right)_{\varphi,\,\delta}\right| \;=\; \frac{1}{\sin Z\ \cos\varphi} \;=\; \operatorname{cosec} Z\ \sec\varphi\;, \qquad Z\ \in\ [0°,\, 90°] \tag{5 a}$$

auf den Betrag beschränkt. Diese Gleichung liegt der **Tafel 28** aus dem FULST [10] zugrunde. Im ROSE [11], Tafel 22 ist dagegen der Kehrwert davon vertafelt.

Als nächstes bildet man (Ketten- und Quotientenregel!):

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big[\cos t_{\mathrm{E,W}}\Big]_{h,\,\delta} \;=\; \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\sin h\ -\ \sin\varphi\ \sin\delta}{\cos\varphi\ \ \cos\delta}\right]_{h,\,\delta}$$

$$-\ \sin t_{\mathrm{E,W}}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial\varphi}\right)_{h,\,\delta} \;=$$

$$=\;\frac{-\cos\varphi\ \sin\delta\ \cos\varphi\ \cos\delta\ -\ (\sin h - \sin\varphi\ \sin\delta)\,(-\ \sin\varphi\ \cos\delta)}{\cos^2\varphi\quad \cos^2\delta}$$

$$=\;\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\sin h\ \tan\varphi}{\cos\delta}\ -\ \frac{\tan\delta}{\cos\varphi}\right).$$

Die **Fehlerverstärkung** für die **Breitenänderung** ergibt sich damit zu

$$\boxed{\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial\varphi}\right)_{h,\,\delta} \;=\; \frac{1}{\cos\varphi\ \sin t_{\mathrm{E,W}}}\left(\frac{\tan\delta}{\cos\varphi}\ -\ \sin h\ \frac{\tan\varphi}{\cos\delta}\right)}\,. \tag{6}$$

Der Sinus der Höhe kann hier aber auch direkt durch (2) ersetzt werden, was nach gewissen Umformungen zu

$$\boxed{\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial\varphi}\right)_{h,\,\delta} \;=\; \frac{\tan\delta}{\sin t_{\mathrm{E,W}}}\ -\ \frac{\tan\varphi}{\tan t_{\mathrm{E,W}}}} \tag{6 a}$$

führt (vgl. [3], § 204, Ziffer 2).

Völlig analog dazu berechnet man mit

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\Big[\cos t_{\mathrm{E,W}}\Big]_{h,\,\varphi} \;=\; \frac{\partial}{\partial\delta}\left[\frac{\sin h\ -\ \sin\varphi\ \sin\delta}{\cos\varphi\ \ \cos\delta}\right]_{h,\,\varphi}$$

die **Fehlerverstärkung** für die **Deklinationsänderung** zu

$$\boxed{\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \delta}\right)_{h,\,\varphi} = \frac{1}{\cos\delta\ \sin t_{\mathrm{E,W}}}\left(\frac{\tan\varphi}{\cos\delta} - \sin h\ \frac{\tan\delta}{\cos\varphi}\right)} \tag{7}$$

bzw.

$$\boxed{\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \delta}\right)_{h,\,\varphi} = \frac{\tan\varphi}{\sin t_{\mathrm{E,W}}} - \frac{\tan\delta}{\tan t_{\mathrm{E,W}}}} \tag{7 a}$$

(vgl. [3], § 204, Ziffer 3).

Für alle **Fehlerverstärkungen** (5), ... , (7 a) gilt

$\sin t_{\mathrm{E,W}} \neq 0\,,\quad \rightsquigarrow\ t_{\mathrm{Gr}} \neq -\lambda \qquad$ bzw. $\qquad \sin Z \neq 0\,,$

und Annäherung an die Kulmination ($t_{\mathrm{E,W}} \to 0$) bedeutet grundsätzlich, daß die Fehlerverstärkungen über alle Maßen wachsen ($\to \infty$).

Außerdem gilt für o. g. Gleichungen noch $\varphi,\ \delta \neq \pm 90°$, was aber in der Praxis keine Schwierigkeiten machen dürfte.

Die Fehlerproblematik beim Verfahren der Mittagslänge reduziert sich erheblich, wenn sich der Schiffsort zwischen den beiden Höhenmessungen nicht oder nur geringfügig ändert, so daß praktisch von

$\varphi,\ \lambda = \text{const}$

ausgegangen werden darf. Genau dies ist Voraussetzung zur „Methode der gleichen Höhen“. Denn nach Breusing [3] dient diese ausschließlich zum Zwecke der Chronometerkontrolle! Das daraus abgeleitete Verfahren zur Ermittlung der Mittagslänge geht laut Schenk [6] auf britische Yachtsegler zurück.

Vernachlässigt man die Änderung der Deklination zusätzlich, was die Anwender des Verfahrens zur Ermittlung der Mittagslänge in der Praxis grundsätzlich tun, so beruht der **Fehler des Ortsstundenwinkels bei festem Schiffsort und konstanter Deklination** mit

$$\boxed{\left|\Delta^{\mathrm{f}} t_{\mathrm{E,W}}\right|_{\varphi,\,\delta} = \mathsf{FV}\cdot\left|\Delta^{\mathrm{f}} h\right|} \qquad \text{(vgl. hierzu (4))} \tag{8}$$

ausschließlich auf dem Fehler, den der Navigator bei der Höhenmessung macht. Die darin enthaltene **Fehlerverstärkung für den Höhenfehler** berechnet man aufgrund von (5) zu

$$\boxed{\mathsf{FV} := \left|\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial h}\right)_{\varphi,\,\delta}\right| = \frac{\cos[h\,(\varphi,\delta,t_{\mathrm{E,W}})]}{\cos\varphi\ \cos\delta\ \sin t_{\mathrm{E,W}}}}\ . \tag{9}$$

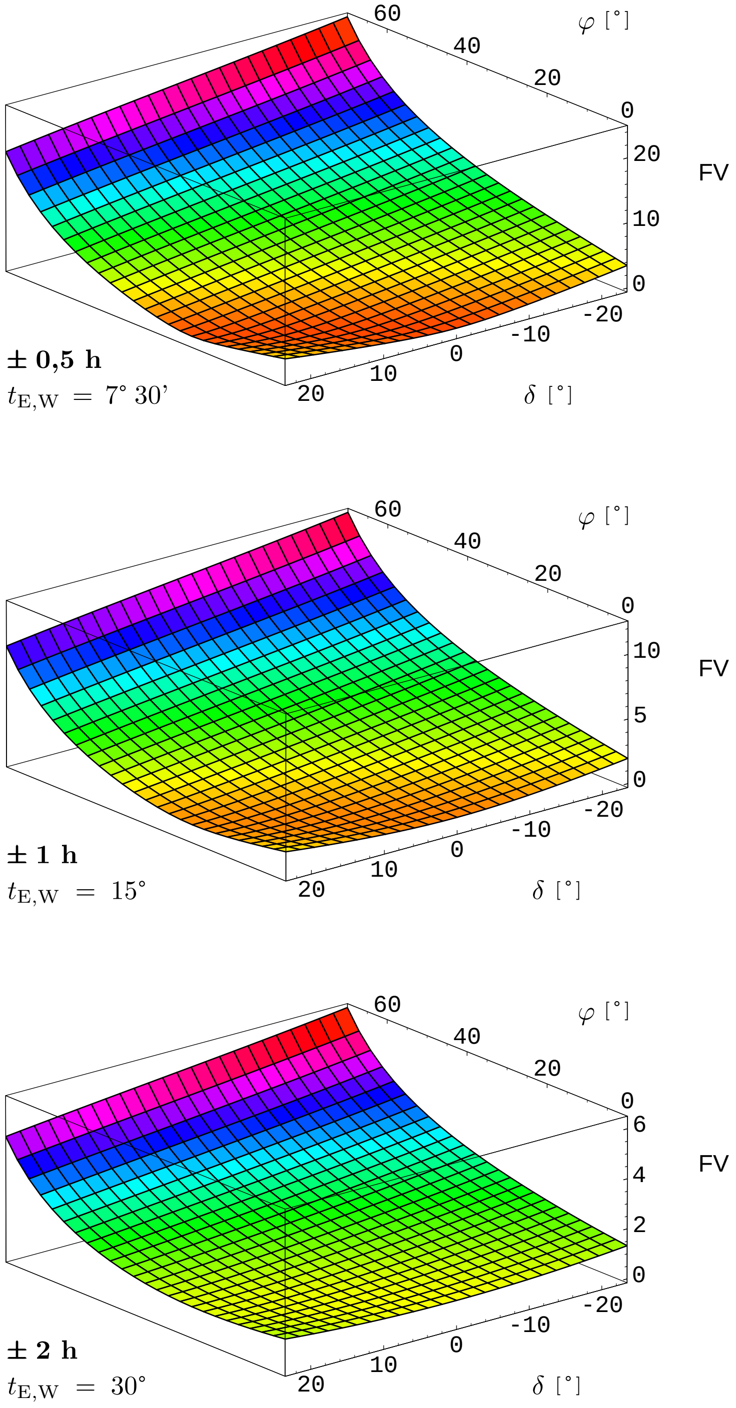

Abb. 1 $\mathsf{FV}(\varphi, \delta)$ für verschiedene „Abstände" zum Meridiandurchgang

In Abbildung 1 ist die Fehlerverstärkung nach (9) über Breite φ und Deklination δ für verschiedene Ortsstundenwinkel entsprechend der Höhenmessungen zum Zeitpunkt **Meridiandurchgang ± 0,5 h**, **± 1 h** und **± 2 h** aufgetragen. Dabei wurde auf negative Werte der Breite verzichtet, da die Fehlerverstärkung für gegebenen Ortsstundenwinkel den Symmetriebedingungen

$$\mathsf{FV}(\varphi,\delta) \;=\; \mathsf{FV}(-\varphi,-\delta)\;, \qquad \mathsf{FV}(-\varphi,\delta) \;=\; \mathsf{FV}(\varphi,-\delta) \qquad\qquad (t_{\mathrm{E,W}} = \mathrm{const})$$

genügt. Man entnimmt den in Abbildung 1 gezeigten Diagrammen auf den ersten Blick, daß neben der Annäherung an die Kulmination vor allem hohe Breiten problematisch sind. Insbesondere in den Breiten, wie sie dem nördlichen Europa oder einer Kap-Horn-Passage entsprechen ($|\varphi| > 50°$), liegen die Fehlerverstärkungen je nach zeitlichem Abstand vom Meridiandurchgang oberhalb der Werte 2 ... 6. Und für $|\varphi| = 70°$ sowie ± 0,5 h werden Werte um die 20 erreicht.

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz (1) bzw. (4) bezieht sich strenggenommen nur auf systematische Fehler. Während Änderungen bei Breite, Länge und Deklination eindeutig systematischer Natur sind, besteht der Höhenmeßfehler aus systematischen wie aus zufälligen Bestandteilen. Letztere aber „verkraftet“ das Fehlerfortpflanzungsgesetz durchaus.

Systematische Meßfehler des Navigators (etwa: immer 1' zu groß) oder der Situation (z. B. falsche Indexbeschickung oder temperaturbedingt fehlerhafte Kimmtiefe) haben auf die Berechnung der Mittagslänge keinen Einfluß, da der daraus resultierende Fehler des Ortsstundenwinkels vormittags auf t_{E} und nachmittags auf t_{W} wirkt. Durch die arithmetische Mittelung der zugehörigen Greenwich-Stundenwinkel bzw. deren Zeiten heben sich die systematischen Fehlereinflüsse bei der Höhenmessung dann aber wieder auf.

Zufällige Fehler des Navigators hängen vom Seegang, den Sichtverhältnissen und natürlich von dessen Können ab. Es ist sicher nicht übertrieben, wenn man für die Höhenmessungen vor und nach dem Meridiandurchgang einen Meßfehler von $|\Delta^{\mathrm{f}} h| = 2'$ ansetzt. Aufgrund der Zufälligkeit muß man davon ausgehen, daß wechselnde Vorzeichen vorkommen, so daß hier nur Beträge untersucht werden. Für die (moderate) Breite von $|\varphi| = 40°$ und beliebige Sonnen-Deklination $|\delta| = 0 \ldots 23{,}5°$ sowie Höhenmessungen zum Zeitpunkt **Meridiandurchgang ± 1 h** läuft das auf einen Längenfehler von

$$\left|\Delta^{\mathrm{f}} t_{\mathrm{E,W}}\right|_{\varphi,\,\delta} \;=\; \mathsf{FV}\cdot\left|\Delta^{\mathrm{f}} h\right| \;\approx\; (2 \ldots 3{,}5)\cdot 2' \;=\; 4 \ldots 7'$$

hinaus. Das entspricht einer Abweitung von 3 ... 5,4 sm. Für Höhenmessungen zum Zeitpunkt **Meridiandurchgang ± 0,5 h** verschärft sich das mit

$$\left|\Delta^{\mathrm{f}} t_{\mathrm{E,W}}\right|_{\varphi,\,\delta} \;=\; \mathsf{FV}\cdot\left|\Delta^{\mathrm{f}} h\right| \;\approx\; (3{,}5 \ldots 6{,}5)\cdot 2' \;=\; 7 \ldots 13'$$

auf fast den doppelten Fehler. Hier beträgt die Abweitung 5,4 ... 10 sm. Diese Beispielrechnungen zeigen, daß die Genauigkeit der Mittagslänge – selbst für die ideale Situation fester Position und konstanter Deklination – recht bescheiden sein kann.

Jedenfalls, wenn die Messungen nicht noch weiter als ± 1 h vom Meridiandurchgang entfernt sein sollen.

Eine Vergleichsrechnung nach dem *Höhenverfahren* gibt weitere Erkenntnis: Möge 4 h vor dem Meridiandurchgang, d. h. bei $t_\mathrm{E} = -t = 60°$ oder (was dasselbe ist) bei $t = 300°$, die Höhe der Sonne mit einem Fehler von $\Delta^\mathrm{f} h = \pm\, 2'$ beobachtet worden sein. Und außerdem befinde sich das Schiff mit 5 kn auf Ost-West-Kurs. Dann wird der Navigator zur Ermittlung der Mittagslänge die Standlinie vom Morgen auf den Kulminationszeitpunkt versegeln, und zwar mit $5\,\mathrm{kn} \cdot 4\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{sm}$ auf dem $\mathrm{K\ddot{u}G} = 90°, 270°$. Nimmt man ferner für den Fehler der Logge ±10 % an, d. h. hier (bezogen auf die versegelte Distanz) einen Koppelfehler von $\pm\, 2$ sm in Ost-West-Richtung, dann ergibt sich mit dem Höhenfehler von $\pm\, 2' \mathrel{\widehat{=}} \pm\, 2\,\mathrm{sm}$ ein Gesamtfehler von $\pm\, 4$ sm in der Länge. Bei dieser Rechnung sei allerdings angenommen, daß der Azimut der morgendlichen Höhenbeobachtung in der Größenordnung von 90° liegt. Sollte er davon erheblich abweichen, wird sich der Einfluß des Höhenfehlers auf den Gesamtfehler der Mittagslänge allenfalls verringern.

Diese Vergleichsrechnung zeigt, daß selbst bei Idealbedingungen und moderaten Breiten das Verfahren der Mittagslänge enttäuschend ungenau ist. Das Höhenverfahren, das in der Nähe des ersten Vertikals praktisch mit dem Verfahren der *Chronometerlänge* übereinstimmt, ist allemal besser – selbst dann, wenn man einen erheblichen Koppelfehler zuläßt.

In Abbildung 1 ist ferner zu erkennen, daß die Fehlerverstärkung FV für geeignete Wertepaare, was Breite und Deklination angeht, minimal wird. Zur Ermittlung derselben bildet man zunächst mithilfe von (9) die partielle Ableitung

$$\left(\frac{\partial\,\mathsf{FV}}{\partial\varphi}\right)_{t,\,\delta} \;=\; \frac{\sin\delta\,\cos t_{\mathrm{E,W}} \;-\; \tan\varphi\,\cos\delta}{\cos h\,\cos\varphi\,\sin t_{\mathrm{E,W}}}$$

und findet durch Nullsetzen derselben entsprechend

$$\left(\frac{\partial\,\mathsf{FV}}{\partial\varphi}\right)_{t,\,\delta} \;\equiv\; 0 \qquad \rightsquigarrow \quad \sin\delta\,\cos t_{\mathrm{E,W}} \;-\; \tan\varphi\,\cos\delta \;=\; 0$$

schließlich den gesuchten Zusammenhang zwischen Breite und Deklination (für gegebenen Ortsstundenwinkel) zu

$$\varphi \;=\; \arctan\!\big[\,\tan\delta\,\cos t_{\mathrm{E,W}}\,\big] \;\approx\; \delta\,\cos t_{\mathrm{E,W}}\;. \tag{10}$$

Sind aber die Zeitpunkte der Höhenmessungen nicht weiter als ± 1 h vom Meridiandurchgang entfernt ($t_{\mathrm{E,W}} < 15°$), so ist stets $\cos t_{\mathrm{E,W}} > 0{,}96$. Grob gesagt heißt das:

Das Verfahren der Mittagslänge funktioniert am besten für $\varphi \approx \delta$.

Eine Überraschung ist das nicht gerade. Schließlich ist das genau die Situation, die in [1], Abschnitt 5.1.5 (*Höhenverfahren bei Breite in der Nähe zur Deklination*) ausführlich behandelt wird. Man erhält dann aus Höhenmessungen zu allen Zeiten eine verläßliche Länge, aber eine sichere Mittagsbreite ist dabei nicht zu machen.

Bei den **Änderungen von Breite und Deklination**, welche im Zeitintervall zwischen den beiden Höhenmessungen erfolgen, handelt es sich (meßtechnisch gesehen) zwar um Fehlereinflüsse, aber eben um solche, die im Gegensatz zum Höhenfehler rein systematischer Natur sind. Und darüberhinaus sind diese Fehlereinflüsse ja recht gut bekannt aus Koppelnavigation bzw. genau bekannt aus dem Nautischem Jahrbuch [NJ]. Man kann sie also „herausrechnen“. Die Situation ist insofern günstiger als beim Höhenfehler, mit dem man sich abfinden muß.

Ausgangspunkt für das weitere Vorgehen ist das völlig „fehlerfreie“ Verfahren der Mittagslänge, Mit anderen Worten: es gebe keine Fehler bei der Höhenmessung (die wurden ja zuvor behandelt), und mit $\varphi, \delta = \text{const}$ auch keine Änderungen bei den übrigen Parametern. Damit liegt jener Sachverhalt vor, der in Abbildung 2 oben dargestellt ist, bei dem nämlich jene Symmetrie existiert, welche „Grundidee“ des ganzen Verfahren ist.

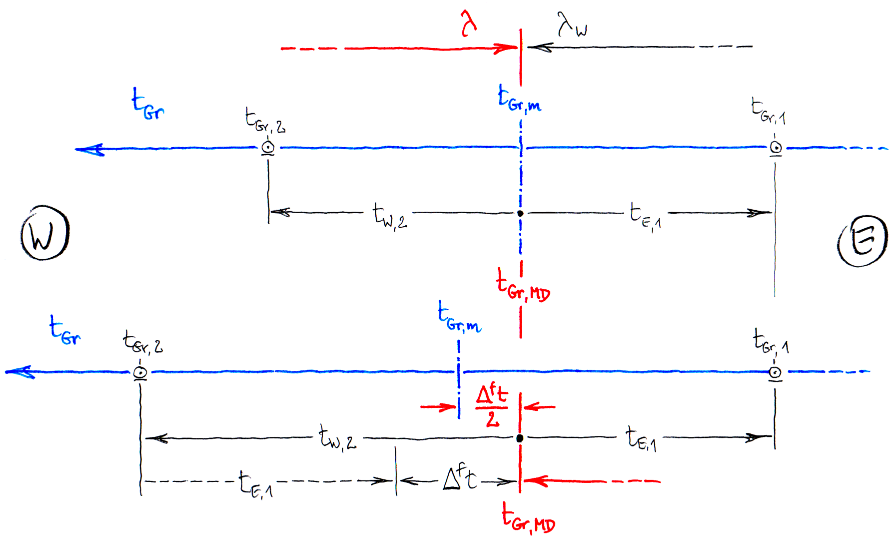

Abb. 2 Zur Berechnung von $t_{\mathrm{Gr,MD}}$

Dabei ist es praktisch, den Ortsstundenwinkel der Höhenmessung **1** am Vormittag mit $t_{\mathrm{E},1}$ nach Osten zu zählen, den Ortsstundenwinkel der Höhenmessung **2** am Nachmittag mit $t_{\mathrm{W},2}$ aber – wie gewohnt – nach Westen. Dann folgt aufgrund der Symmetrie sofort die Gleichheit der Ortstundenwinkel

$$t_{\mathrm{E},1} \;=\; t_{\mathrm{W},2}\;, \tag{11}$$

und der Greenwich-Stundenwinkel des Meridiandurchganges **MD** läßt sich gemäß

$$t_{\mathrm{Gr,\,MD}} \;=\; t_{\mathrm{Gr,m}} \;:=\; \tfrac{1}{2}\left(t_{\mathrm{Gr},1} + t_{\mathrm{Gr},2}\right) \tag{12}$$

als arithmetisches Mittel $t_{\mathrm{Gr,m}}$ der beiden Greenwich-Stundenwinkel $t_{\mathrm{Gr},1}$ und $t_{\mathrm{Gr},2}$ berechnen. Die letzteren müssen natürlich für die jeweiligen Zeitpunkte dem Nautischen Jahrbuch entnommen werden.

Zur Erinnerung: Die Durchführung des Verfahrens läuft standardmäßig so, daß zunächst die Zeitpunkte der Höhenmessung gemittelt werden und anschließend für das Ergebnis der zugehörige Greenwich-Stundenwinkel nachgeschlagen wird (vgl. [1], Abschnitt 4.2). Dieser stellt die gesuchte **Mittagslänge** als *Westlänge* dar. Ansonsten muß mit

$\lambda \;=\; 360° - t_{\mathrm{Gr,\,MD}}$

auf *Ostlänge* bzw. *vollkreisige Länge* umgerechnet werden.

Bei der oben geschilderten Ermittlung von $t_{\mathrm{Gr,MD}}$ werden aber zunächst die zu den Zeitpunkten der Höhenmessungen gehörigen Greenwich-Stundenwinkel nachgeschlagen, und erst dann wird gemittelt. Beide Vorgehensweisen führen auf dasselbe Ergebnis, da die Abhängigkeit des Greenwich-Stundenwinkels von der Zeit im Bereich von einigen Stunden als linear angesehen werden kann. Der Grund für die oben beschriebene, vom Standard abweichende Vorgehensweise liegt in der weiteren Rechnung begründet.

Dem unteren Teil von Abbildung 2 ist zu entnehmen, daß die Greenwich-Stundenwinkel $t_{\mathrm{Gr,1}}$ und $t_{\mathrm{Gr,MD}}$ sowie der Ortsstundenwinkel $t_{\mathrm{E,1}}$ gegenüber der symmetrischen Situation unverändert sind. Aufgrund von **Änderungen bei $\boldsymbol{\varphi}$ und $\boldsymbol{\delta}$** im Zeitintervall zwischen den Höhenmessungen ist der Nachmittags-Ortsstundenwinkel $t_{\mathrm{W,2}}$ gegenüber dem Vormittags-Ortsstundenwinkel $t_{\mathrm{E,1}}$ um den Fehler

$$\Delta^{\mathrm{f}} t \;:=\; t_{\mathrm{W,2}} - t_{\mathrm{E,1}} \tag{13}$$

verändert. Daraus resultiert nun gemäß Abbildung 2 der Greenwich-Stundenwinkel des Meridiandurchganges zu

$$\boxed{t_{\mathrm{Gr,\,MD}} \;=\; t_{\mathrm{Gr,m}} - \tfrac{1}{2}\,\Delta^{\mathrm{f}} t \;=\; \tfrac{1}{2}\left(t_{\mathrm{Gr,1}} + t_{\mathrm{Gr,2}} - \Delta^{\mathrm{f}} t\right)} \tag{14}$$

mit

$$\Delta^{\mathrm{f}} t \;=\; \Delta^{\mathrm{f}} t_{\mathrm{E,W}}\big|_h \;=\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \varphi}\right)_{h,\,\delta} \Delta^{\mathrm{f}}\varphi \;+\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \delta}\right)_{h,\,\varphi} \Delta^{\mathrm{f}}\delta\,. \tag{15}$$

Es bleibt nun noch die Frage, welche Parameterwerte hier in die Fehlerverstärkungen einzusetzen sind. Da (15) letztlich eine Linearapproximation für (3) darstellt, die ihren „Stützpunkt“ im Zustand **1** hat, ist dort φ_1 für den gegißten Ort zum Vormittagszeitpunkt und ebenso der Ortsstundenwinkel mit $t_{\mathrm{E,1}}$ (aufgrund der gegißten Länge zum Vormittagszeitpunkt) sowie die Deklination δ_1 einzusetzen. Aus (15) und (6 a), (7 a) folgt somit

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta^{\mathrm{f}} t \;=\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \varphi}\right)^{(\mathbf{1})}_{h,\,\delta} \Delta^{\mathrm{f}}\varphi \;+\; \left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \delta}\right)^{(\mathbf{1})}_{h,\,\varphi} \Delta^{\mathrm{f}}\delta \\ &\text{mit} \\ &\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \varphi}\right)^{(\mathbf{1})}_{h,\,\delta} \;=\; \frac{\tan\delta_1}{\sin t_{\mathrm{E,1}}} - \frac{\tan\varphi_1}{\tan t_{\mathrm{E,1}}}\,, \\ &\left(\frac{\partial t_{\mathrm{E,W}}}{\partial \delta}\right)^{(\mathbf{1})}_{h,\,\varphi} \;=\; \frac{\tan\varphi_1}{\sin t_{\mathrm{E,1}}} - \frac{\tan\delta_1}{\tan t_{\mathrm{E,1}}}\,. \end{aligned}} \tag{16}$$

Zuletzt soll noch der Einfluß der **Längenänderung** untersucht werden, wie sie auf Ost-West-Kursen vorkommt. Unter Annahme einer konstanten Geschwindigkeit über Grund teilt sich die zwischen den Höhenmessungen erfolgte Längenänderung

$$\Delta\lambda \;:=\; \lambda_2 \;-\; \lambda_1 \tag{17}$$

symmetrisch in ein $\Delta\lambda/2$ vor und ein ebensolches nach der Kulmination. Da die Länge jedoch nicht in (3) eingeht, ändern sich die Ortsstundenwinkel nicht. Damit bleibt (11) weiter gültig. Die Ortstundenwinkel $t_{\mathrm{E},1}$ und $t_{\mathrm{W},2}$ beziehen sich jetzt nur auf verschiedene Längen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Das tut aber der Symmetrie keinen Abbruch, wie man aus Abbildung 3 sofort entnimmt. Damit gilt

$$t_{\mathrm{Gr,\,MD}} \;=\; t_{\mathrm{Gr,m}} \;=\; \tfrac{1}{2}\left(t_{\mathrm{Gr},1} \;+\; t_{\mathrm{Gr},2}\right) \tag{12}$$

auch hier, womit die Mittagslänge bereits feststeht. Und das Überraschende dabei ist: Es gibt keinen Einfluß der Längenänderung auf die Mittagslänge! Jedenfalls, solange die Längenänderung vor und nach dem Meridiandurchgang die gleiche ist. Die Symmetrie erledigt dann alles. Ist die Längenänderung der einzige Fehlereinfluß, muß man (12) auch nicht unbedingt benutzen. Man kann dann – wie im Standardfall der festen Position mit konstanter Deklination – einfach die Zeiten der Höhenmessungen mitteln und dazu den Greenwich-Stundenwinkel feststellen.

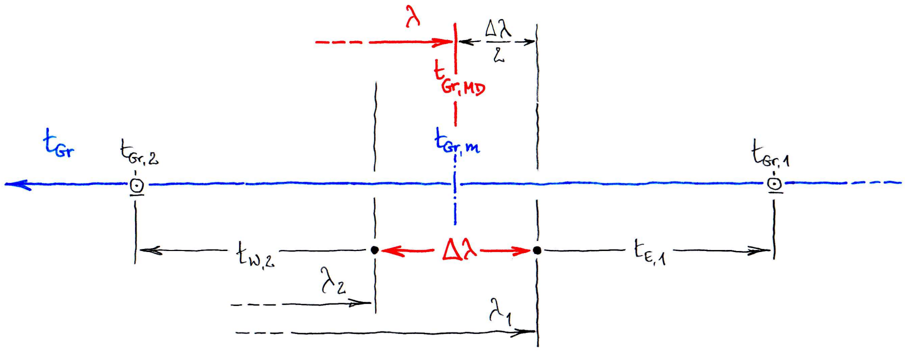

Abb. 3 Zum Einfluß der Längenänderung

Auswirkungen auf die navigatorische Praxis

Wie aus den vorangegangenen Erörterungen hervorgeht, ist die wichtigste Fehlerverstärkung die **Fehlerverstärkung für den Höhenfehler** nach (5) bzw. (9). Denn diese „wirkt“ auch dann noch, wenn ideale Voraussetzungen in Gestalt von festem Ort und konstanter Deklination gegeben sind. Beeindruckend ist die Fehlerverstärkung des Höhenfehlers vor allem in hohen Breiten. Hier kann man vom Verfahren der Mittagslänge allgemein abraten. Nun ist es aber so, daß das Verfahren der Mittagslänge besonders gern von Weltumseglern genutzt wird, deren Motivlage ein besonders einfaches Verfahren ist, d. h. wie bei der Mittagsbreite ohne Winkelfunktionen, Tabellen etc. Hier gibt es die immerhin tröstliche Tatsache,

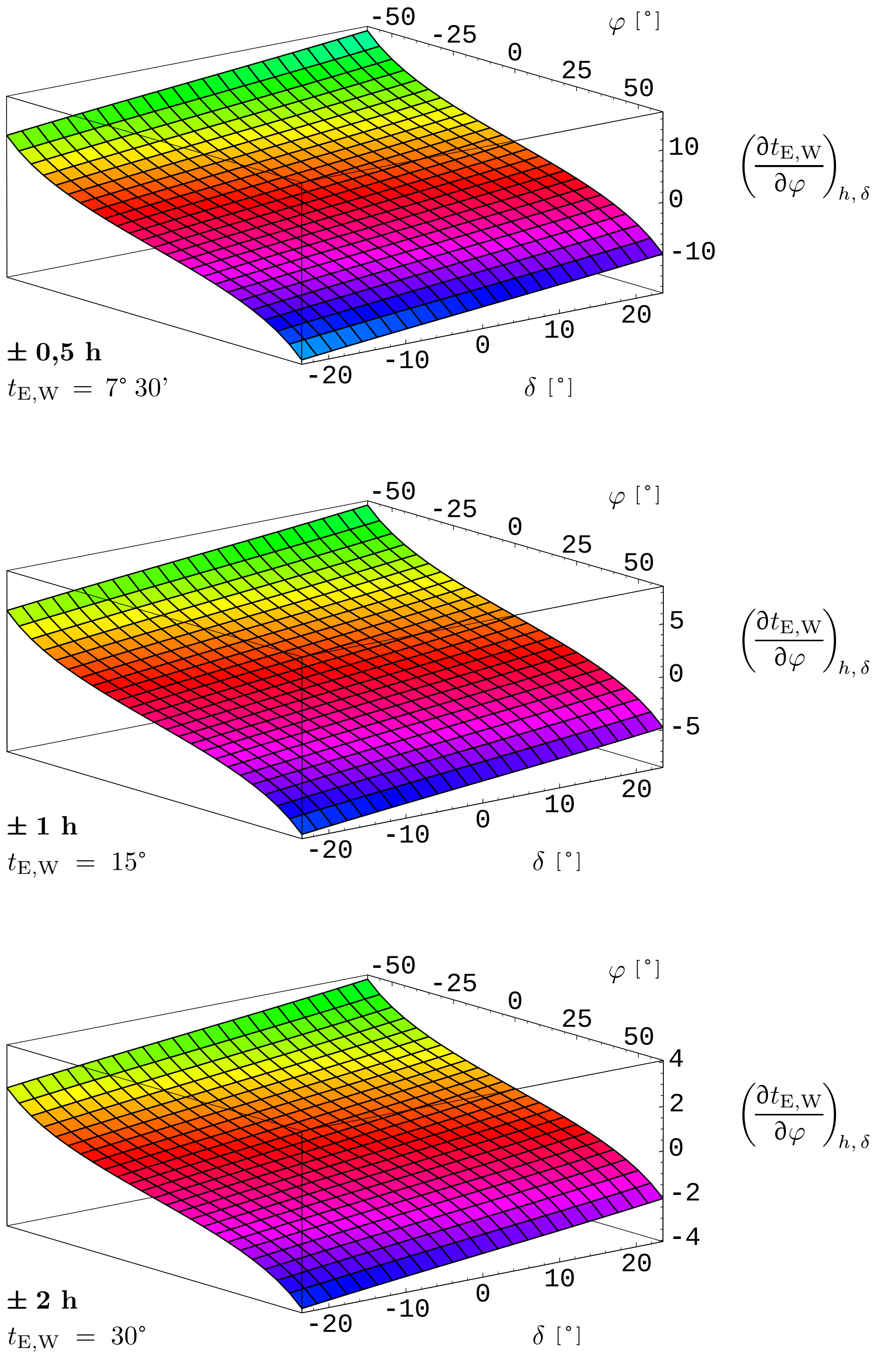

Abb. 4 Fehlerverstärkung der Breitenänderung für verschiedene „Abstände“ zum Meridiandurchgang

daß Weltumsegler auf ihrer Tour selten aus der äquatorialen Umgebung zwischen 40° S und 40° N herauskommen. Damit sind die schlimmsten Fehlerverstärkungen ausgeschlossen, wie man der Abbildung 1 und den Fehlerabschätzungen auf S. 7 entnimmt. Und am besten funktioniert das Verfahren, wenn $|\varphi - \delta|$ möglichst klein ausfällt bzw. $\varphi \approx \delta$ ist, wie oben festgestellt wurde.

Die Änderungen bei Breite und Deklination können unter Einsatz eines Taschenrechners mit vertretbarem Aufwand eingerechnet werden, wie an den Beispielen unten gezeigt wird. Dazu braucht man lediglich (14) und (16). Allerdings kommt dabei die Frage nach dem Sinn auf, da das allgemeine Höhenverfahren – egal welchen Lösungsweg man einschlägt – die einfachere und bessere Alternative sein dürfte. Zumal ein Weltumsegler mit dem Höhenverfahren ein Verfahren in der Hand hat, mit dem sich alle Situationen bewältigen lassen. Für Minimalisten ist das das Richtige.

Es stellt sich aber noch die Frage, was passiert, wenn Änderungen bei φ und δ einfach ignoriert werden. Mit andere Worten: welche Fehler sind zu erwarten, wenn der Ortsstundenwinkel des Meridiandurchganges nicht nach (14) berechnet wird, sondern aus Gründen der Einfachheit mit dem arithmetischen Mittel der Ortsstundenwinkel identifiziert wird (vgl. (12)), oder – was dasselbe ist – die Zeiten der Höhenmessungen zum Zeitpunkt der Mittagslänge gemittelt werden. Wäre der dabei auftretende Fehler in erträglicher Größenordnung, so wäre das Verfahren in seiner Einfachheit weiterhin praktikabel.

Ein Blick auf Abbildung 4 zeigt, daß die Fehlerverstärkung $(\partial t_{\mathrm{E,W}}/\partial\varphi)_{h,\delta}$ für hohe Breiten am schlimmsten ausfällt, insbesondere wenn Breite und Deklination ungleichnamig sind. Man erahnt in allen drei Diagrammen, daß auch hier die Fehlerverstärkung für $\varphi \approx \delta$ am geringsten ausfällt. In der Tat läßt sich durch Nullsetzen der Fehlerverstärkung, also aus $(\partial t_{\mathrm{E,W}}/\partial\varphi)_{h,\delta} \equiv 0$ die Beziehung

$$\varphi \;=\; \arctan\big[\,\tan\delta\,/\,\cos t_{\mathrm{E,W}}\big] \;\approx\; \delta\,/\,\cos t_{\mathrm{E,W}} \tag{18}$$

herleiten. Diese Betrachtung läßt sich in gleicher Weise auch für die andere Fehlerverstärkung $(\partial t_{\mathrm{E,W}}/\partial\delta)_{h,\varphi}$ anstellen. Da bei beiden die Berechnung sehr ähnlich erfolgt (nur φ und δ sind vertauscht), wird auf eine bildliche Darstellung derselben verzichtet. Aus $(\partial t_{\mathrm{E,W}}/\partial\delta)_{h,\varphi} \equiv 0$ folgt hier

$$\varphi \;=\; \arctan\big[\,\tan\delta\,\cos t_{\mathrm{E,W}}\big] \;\approx\; \delta\,\cos t_{\mathrm{E,W}}\;. \tag{19}$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit (10). Setzt man auch hier voraus, daß die Zeitpunkte der Höhenmessungen nicht weiter als ± 1 h vom Meridiandurchgang entfernt sind ($t_{\mathrm{E,W}} < 15°$), so ist wiederum $\cos t_{\mathrm{E,W}} > 0{,}96$. Und es ist festzustellen:

Die Fehlerverstärkungen bezüglich Breiten- und Deklinationsänderung verschwinden nahezu für $\varphi \approx \delta$.

Man darf aber nicht vergessen, daß es hier nicht nur auf die Fehlerverstärkungen, sondern auch auf die Änderungen von Breite $\Delta^{\mathrm{f}}\varphi$ und Deklination $\Delta^{\mathrm{f}}\delta$ selbst ankommt. Die letztere ist besonders einfach abzuschätzen. Wegen der extremalen

Deklinationsänderungsrate der Sonne von $\approx \pm 1$'/h hat man es für den Fall, daß die Höhenmessungen zum Meridiandurchgang mit ± 1 h stattfinden, im äußersten Fall mit $\Delta^{\mathrm{f}}\delta = \pm 2$' zu tun.

Bei der Änderung der Breite ist natürlich die Schiffsgeschwindigkeit maßgeblich, genauer gesagt deren Nord- bzw. Süd-Komponente. Da in der Sportschiffahrt Geschwindigkeiten von 10 kn eher selten überschritten werden, kann man unter Annahme eines reinen Nord-Süd-Kurses sowie der üblichen „± 1 h-Situation“ maximal von 20 sm und damit von $\Delta^{\mathrm{f}}\varphi = \pm 20$' ausgehen.

Die Mittagslänge bei Meyer [4]

Heinz A. Meyer hat nach Absolvieren eines Lehrganges zur Astronavigation selbst ein Buch darüber geschrieben (vgl. das Vorwort in [4]). Dieses Buch „lebt“ von der großen Begeisterung seines Autors und liefert den Lesern viel Motivierendes. Sehr gelungen sind vor allem die Bilder, die in ihrer Größe und Klarheit wesentlich zur Beliebtheit von [4] beitragen. Beim Abschnitt „Mittagslänge“ ist jedoch Vorsicht angebracht.

Meyer führt in [4] zunächst das Verfahren der Mittagslänge in der für Yachtsegler üblichen Form ein, d. h. ohne irgendwelche Fehlereinflüsse zu untersuchen. Da es seiner Erfahrung nach mühsam ist, eine einmal gemessene Höhe nach längerer Zeit wieder „abzupassen“ (stimmt tatsächlich!), verfällt er auf die originelle Idee, den Verlauf der Höhe über der Zeit stückweise, d.h. vor und nach der Kulmination, durch Geraden zu approximieren. Damit will er sich von der Notwendigkeit eines festgelegten, zweiten Meßzeitpunkt zu befreien. Kernstück der Überlegung ist die Symmetrie der $h(\tau)$-Kurve nach

$$\boxed{h(\tau) \;=\; \arcsin\big[\sin\varphi\,\sin\delta \;+\; \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos\left[t_{\mathrm{Gr}}(\tau)+\lambda\right]\big]} \tag{20}$$

mit φ, λ, $\delta = \text{const.}$ Tatsächlich ist diese Kurve wegen

$$t_{\mathrm{Gr}}(\tau = \tau_{\mathrm{Ku}}) \;+\; \lambda \;=\; 360° \;\widehat{=}\; 0° \tag{2a}$$

um den Kulminationszeitpunkt τ_{Ku} herum symmetrisch, was aus der Eigenschaft $\cos\left[-x\right] = \cos\left[x\right]$ folgt, die den Cosinus als *gerade Funktion* ausweist.

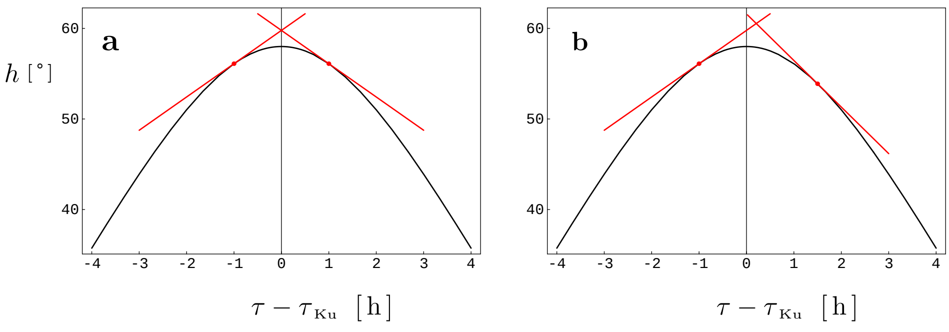

Abb. 5 Linearapproximationen der $h(\tau)$-Kurve für $\varphi = 55°$ N und $\delta = 23°$ N (Beispiel)

Wie aus Abbildung 5 a unmittelbar zu ersehen, lassen sich die Linearapproximationen nur dann zur Feststellung des Kulminationszeitpunktes nutzen, wenn ihre Stützpunkte symmetrisch um denselben angeordnet sind, so wie ja die $h(\tau)$-Kurve selbst auch als symmetrisch angesehen wird. Denn nur dann liegt der Schnittpunkt der Geraden bei $\tau = \tau_{\text{Ku}}$. Verändert man dagegen die Lage eines der beiden Stützpunkte, wie im Bildteil b gezeigt, wandert der Schnittpunkt aus der Symmetrieachse. Diese Konstellation taugt natürlich nicht mehr zur Ermittlung des Kulminationszeitpunktes.

Da man mit einem Sextanten zwar die Höhe der Sonne zu einem bestimmten Zeitpunkt messen kann, jedoch nicht die Geschwindigkeit ihres Auf- oder Abstiegs (= Steigung der Tangenten), sind die Linearapproximationen in Gestalt von *Tangenten* im jeweiligen Stützpunkt (wie in Abb. 5) meßtechnisch schlecht zu realisieren. Es ist daher günstiger, die Geraden als *Sekanten* an der $h(\tau)$-Kurve vorzusehen. Dazu werden jeweils zwei Stützpunkte (aus zwei Höhenmessungen) benötigt. Die zusätzliche Information bezüglich der Steigung entfällt damit, denn diese ist ja bereits in der Lage der Stützpunkte zueinander enthalten.

Es liegt auf der Hand, daß die Sekanten nun ebenso symmetrisch zum Kulminationszeitpunkt angeordnet sein müssen wie zuvor die Tangenten. Die einzige Möglichkeit, die geforderte Symmetrie mit den Mitteln dieses Navigationsverfahrens zu garantieren, ist, die Stützpunkte selbst symmetrisch um den Kulminationszeitpunkt herum anzuordnen. Damit besteht aber grundsätzlich die gleiche meßtechnische Schwierigkeit wie in der „Basisversion“: die zweite Höhenmessung muß als dritte nach der Kulmination „wiedergefunden“ werden und ebenso die erste als vierte.

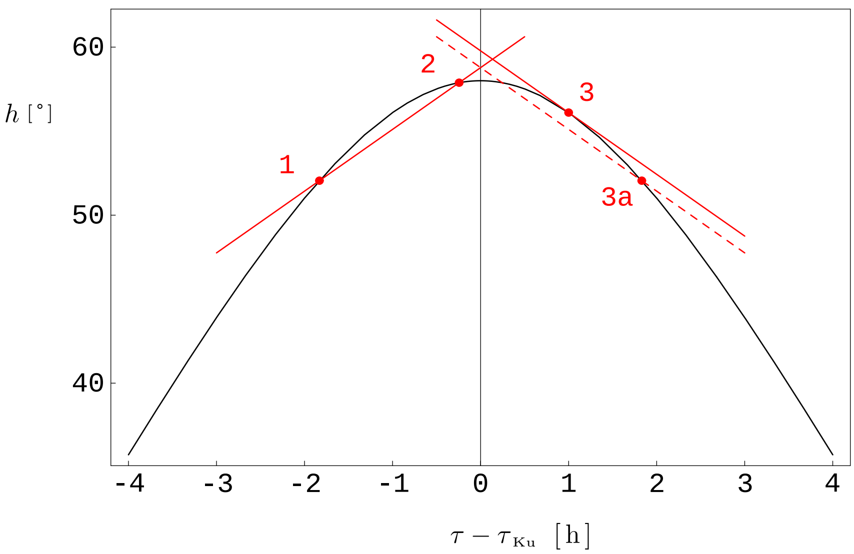

Abb. 6 Zur Konstruktion von Sekanten nach MEYER, [4], S. 55 ff.

Um die meßtechnische Schwierigkeit, eine einmal gemessene Höhe zu einem späteren Zeitpunkt „wiederfinden“ zu müssen, zu vermeiden, schlägt MEYER in [4], Abschnitt *„Die Mittagslänge / Das graphische Verfahren“* (S. 55 ff.), sinngemäß folgendes vor: Vor der Kulmination werden in nicht zu engem zeitlichen Abstand zwei Höhenmessungen durchgeführt und die zugehörigen Zeitpunkte festgestellt. Damit liegt die linksseitige Sekante fest. Nach der Kulmination erfolgt dann nur noch eine dritte Messung, die den Beispielen zufolge höhenmäßig in etwa zwischen den ersten beiden angesiedelt ist, vgl. Abbildung 6. Die graphische Auswertung sieht zunächst die Konstruktion der linksseitigen Sekanten vor. Danach wird durch den dritten Meßpunkt eine Gerade gelegt, deren Steigung zu derjenigen der ersten negativ ist. Beide Geraden bilden also die typische „Dachform“ wie in Abbildung 5 a. Der Schnittpunkt liefert lt. MEYER den Kulminationszeitpunkt.

Leider stimmt das nicht!

Der Gegenbeweis, der das MEYERsche Verfahren zu Fall bringt, ist äußerst einfach: Da der Zeitpunkt, an dem die dritte Höhenmessung stattfindet, in gewissem Rahmen beliebig gewählt werden kann, wird mit diesem Zeitpunkt auch die zugehörige Gerade parallelverschoben. Dadurch ändert sich die Lage des Schnittpunktes, so daß der damit ermittelte „Kulminationszeitpunkt“, der die eigene geographische Länge liefern soll, vom mehr oder weniger zufälligen dritten Meßzeitpunkt abhängt. Das aber kann nicht sein!

Ein korrektes Ergebnis ist nur zu erwarten, wenn – wie in Abbildung 6 durch Punkt 3a dargestellt – der dritte Meßzeitpunkt zufällig so liegt, daß die beiden Geraden wiederum symmetrisch bezüglich des Kulminationszeitpunktes angeordnet sind. Offensichtlich ist MEYER dem Irrtum erlegen, aus der „Steigungssymmetrie“ der beiden Geraden folge auch deren symmetrische Anordnung um den Kulminationszeitpunkt. Abbildung 6 macht deutlich, daß das nur im Spezialfall zutrifft. Man könnte die dritte Höhenmessung sogar so spät legen, daß der Schnittpunkt mit Punkt 1 zusammenfällt. Spätestens dann sollten Zweifel aufkommen!

Exemplarisch sei hier das **Beispiel nach Abbildung 051 aus [4], S. 57** nachgerechnet. Dazu werden von drei erfolgten Höhenmessungen die erste und dritte verwendet, da sich deren Azimute hinreichend unterscheiden. Die Berechnung erfolgt als *Ort aus zwei Höhen ohne Versegelung* nach [1], Abschnitt C.3. Man erhält (unter Annahme der yachtüblichen $\mathsf{Ah} = 2$ m):

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{1. Höhenmessung} \text{ am } 12.08.1998\,,\ \tau_1 = 13.32.46\ \mathsf{UT1} \\
t_{\mathrm{Gr},1} = 21°\,56{,}0',\quad \delta_1 = 14°\,55{,}6'\ \mathrm{N} \\
\mathsf{KA}_1 = 67°\,37{,}7',\quad h_{\mathrm{b},1} = 67°\,50{,}7',\quad \alpha_{\mathrm{Az},1} = 150{,}0° \\
\textbf{3. Höhenmessung} \text{ am } 12.08.1998\,,\ \tau_3 = 15.02.16\ \mathsf{UT1} \\
t_{\mathrm{Gr},3} = 44°\,18{,}7',\quad \delta_3 = 14°\,54{,}5'\ \mathrm{N} \\
\mathsf{KA}_3 = 67°\,40{,}1',\quad h_{\mathrm{b},3} = 67°\,53{,}1',\quad \alpha_{\mathrm{Az},3} = 209{,}7°
\end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \varphi = 34°\,37{,}6'\ \mathrm{N}, \\ \lambda = 33°\,11{,}5\ \mathrm{W}. \end{array}$$

Die hier erhaltene Breite ist glaubwürdig für die Ansteuerung von Norfolk/USA, auch wenn es dann noch reichlich 2000 sm bis dahin sind. Die Länge unterscheidet sich aber von MEYERs Mittagslänge von 34° 14,6' W um immerhin 63,1' bzw.

52 sm! Weiterhin läßt sich mit der errechneten Position der Höhenverlauf zu

$$h(\tau) \;=\; \arcsin\big[\,0{,}14628 \;+\; 0{,}79513\,\cos\,[\,t_{\mathrm{Gr}}(\tau) - 33{,}1916°\,]\,\big]$$

bestimmen, wobei die Deklination zu $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3) = 14°\,55{,}05'$ N gemittelt wurde. Für die zweite Höhenmessung erhält man demzufolge

$$h_2 \;=\; h(\tau = \tau_2) \;=\; 69°\,57{,}5' \quad\rightsquigarrow\; \mathsf{KA}_2 \;=\; 69°\,44{,}5'\;.$$

Dieses Ergebnis für KA_2 unterscheidet sich nun eklatant von Meyers 67° 49,2' für die zweite Höhenmessung. Letzterer Wert kann schon deshalb nicht stimmen, weil die Sonne dann in einer knappen halben Stunde nur um etwa 12' gestiegen wäre – und das auf einer Breite von ungefähr 35° N im Sommer, wo die Mittagshöhe auf über 70° steigt? Hier stimmt nichts.

Fazit

Ein einfaches Rechenverfahren zu haben – ohne Winkelfunktionen (oder deren Logarithmen), welches lediglich die vier Grundrechenarten erfordert, das war einst das Motiv vieler Blauwassersegler, sich mit **Mittagsbreite**[2] und **Mittagslänge** einzulassen. Während die Mittagsbreite, deren Wurzeln im Altertum liegen, zu den „etablierten Verfahren" gehört, die von alters her an den Seefahrtsschulen gelehrt werden, ist die *Mittagslänge auf die Yachtszene beschränkt.*

Der Vorteil der einfachen Auswertbarkeit von Mittagsbreite und -länge wird jedoch mit einem nicht unerheblichen praktischen Nachteil erkauft. Jeder, der diese Verfahren einmal ausprobiert hat, weiß, worum es dabei geht. Denn im Gegensatz zum Höhenverfahren nach St. Hilaire kommt es nicht nur darauf an, die Höhe eines Gestirnes möglichst genau zu messen (bei gleichzeitiger Erfassung der Zeit). Es handelt sich vielmehr um bestimmte Höhen zu bestimmten Zeiten. Das heißt, der Navigator muß sich rechtzeitig (!) in Meßposition bringen und in dieser (auf Yachten) nicht immer angenehmen Haltung mit dem immer „schwerer" werdenden Sextanten in der Hand den entscheidenden Augenblick abpassen. Bei der Mittagshöhe ist das noch vergleichsweise harmlos, verharrt doch die Sonne scheinbar für einige Minuten in der Kulmination. Anders sieht es bei der Mittagslänge aus. Die voreingestellte Höhe ist auf dem absteigenden Ast schnell mal verpaßt. Oder schlimmer noch: falsch gemessen, ohne was zu merken. Abschließend sei bemerkt, daß es dem Sextanten auch alles andere als guttut, bei entsprechendem Wetter von der Gischt „eingenebelt" zu werden.

Aus „handwerklicher" Sicht spricht alles gegen das Verfahren der Mittagslänge und für das Höhenverfahren nach St. Hilaire. Aus mathematischer Sicht auch. Die oben notierten Herleitungen zeigen:

- Hohe Breiten (> 40°) an sich erzeugen schon hohe Werte aller Fehlerverstärkungen. Das wird noch gesteigert, wenn Breite und Deklination ungleichnamig sind (z.B. Nordeuropa im Winter). Anders ausgedrückt: Je flacher die

[2] Wolfgag Hausner über andere Weltumsegler: *„Sie breiteln sich um die Welt."* gefunden auf `www.yacht.de/schenk/n000/mittag.html`, Zugriff am 17.01.2013

Bahn der Sonne am Himmel verläuft, um so größer werden alle einzelnen Fehler und erst recht der Gesamtfehler!

- Am besten funktioniert das Verfahren der Mittagslänge für $\varphi \approx \delta$, weil dann alle Fehlerverstärkungen minimal werden. Möglich ist das nur in den Tropen! Leidlich gut funktioniert es, wenn $|\varphi - \delta|$ hinreichend klein ausfällt. Dieser Differenzbetrag kann für die „ungleichnamige“ Situation aber auch innerhalb der Tropen noch recht groß werden.
- Die Situation mit $\varphi \approx \delta$, die für die Ermittlung der Mittagslänge ideal ist, erlaubt leider keine einfache und zuverlässige Beobachtung der Mittagsbreite (vgl. [1], Abschnitt 5.1.5).
- Die *systematischen Fehler* wie Änderung von Breite und Deklination im Zeitintervall der Höhenmessungen lassen sich ohne weiteres „herausrechnen“. Damit ist es dann aber um die Einfachheit des Verfahrens geschehen. Der „normale“ Navigator wird darauf verzichten und die entsprechenden Fehler ignorieren.
- Das einfachste und beste ist das Höhenverfahren nach St. Hilaire – in jeder gestirnsbeobachtungsfähigen Lage! Auch wenn manchem die Auswertung zunächst schwerfällt, die Schwierigkeiten sind klein gegenüber dem, was man sich an Unsicherheit und Unbequemlichkeit bei der Mittagslänge einhandelt. Das mit der Unbequemlichkeit gilt auch bei der Mittagsbreite.

Dieser Artikel ist eine Ergänzung zu [1]. Damit gilt der dort formulierte Haftungsausschluß auch hier:

Literaturverzeichnis

[1] Mestemacher, Franka-Maria: *Astronomische Navigation*. Herausgegeben vom Kreuzer Yacht Club Deutschland e.V. (KYCD). 3. Auflage. Kruse, Stralsund 2018

---

[2] Bowditch, Nathaniel: *The American Practical Navigator*. National Imagery and Mapping Agency, Bethesda (MD/USA), 2002

[3] Breusing, Arthur: *Steuermannskunst*. Im Verein mit O. Fulst und H. Meldau, neu berabeitet von C. Schilling. Verlag von M. Heinsius Nachfolger, Leipzig 1909

[4] Meyer, Heinz A.: *Astronavigation*. 3. Auflage. Palstek Verlag, Hamburg 2005

[5] Müller/Krauss: *Handbuch für die Schiffsführung*. Erster Band, Teil A und B. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1983

[6] Schenk, Bobby: *Yachtnavigation*. Verlag Delius, Klasing & Co, Bielefeld 2006

[7] Stein, Walter; Kumm, Werner: *Astronomische Navigation*. Yachtbücherei Bd. 88. Verlag Delius, Klasing & Co, Bielefeld 2002

[8] Zeidler, E. (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, Wiesbaden 2003

[9] Dt. Hochseesportverband „Hansa“ e.V. (Hrsg.): *Seemannschaft*. Handbuch für den Yachtsport. Verlag Delius, Klasing & Co, Bielefeld 2011

Tafelwerke

[10] Lütjen; Stein; Zwiebler: *Fulst Nautische Tafeln*. Arthur Geist Verlag, Bremen 1981

[11] Rose, Gerhard: *Nautische Tafeln*. Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin 1968 (in der DDR erschienen, entspricht weitgehend [10])

Periodika

[NJ] *Nautisches Jahrbuch 20xx*. Ephemeriden und Tafeln. Bundesamt für Seeschiffahrt und Hydrographie, Hamburg 20*xx*