Lösungen zu TM I

Aufgabe 1.1

a) $\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = -14$

c) $c_z = 2$

d) $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

e) $\left(\underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{b}}\,\underline{\mathbf{c}}\right) = 300$

f) $\|\underline{\mathbf{a}}\| = \sqrt{59}\,,$ $\qquad \|\underline{\mathbf{d}}\| = 5$ $\qquad$ (vgl. die „Maurer-Regel“: $3^2 + 4^2 = 5^2$)

Aufgabe 1.2

$$
\begin{aligned}
c^2 = \|\vec{\mathbf{c}}\|^2 &= \vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{c}} \\
&= \left(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}\right) \\
&= \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \; - \; 2\,\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \; + \; \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \\
&= \left\|\vec{\mathbf{a}}\right\|^2 \; - \; 2\left\|\vec{\mathbf{a}}\right\| \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\| \cos\gamma \; + \; \left\|\vec{\mathbf{b}}\right\|^2 \\
&= a^2 \; + \; b^2 \; - \; 2\,a\,b\,\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.3

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{u}} \pm \vec{\mathbf{v}}\|^2 &= (\vec{\mathbf{u}} \pm \vec{\mathbf{v}}) \cdot (\vec{\mathbf{u}} \pm \vec{\mathbf{v}}) \\ &= \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} \pm 2\, \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\ &= \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 \pm 2\, \|\vec{\mathbf{u}}\|\, \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\alpha + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 \end{aligned}$$

$$\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 = 4\, \|\vec{\mathbf{u}}\|\, \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\alpha$$

$$\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \alpha < 90^\circ \\ = 0 & \text{für} \quad \alpha = 90^\circ \\ < 0 & \text{für} \quad \alpha > 90^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 &> \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 & \text{für} \quad \alpha < 90^\circ \\ \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 &= \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 & \text{für} \quad \alpha = 90^\circ \\ \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 &< \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 & \text{für} \quad \alpha > 90^\circ \end{aligned}$$

Da die durch $+\sqrt{}$ definierte Abbildung monoton wachsend ist, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| &> \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\| & \text{für} \quad \alpha < 90^\circ, \\ \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| &= \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\| & \text{für} \quad \alpha = 90^\circ, \\ \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| &< \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\| & \text{für} \quad \alpha > 90^\circ. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

Der durch den Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}}$ vorgegebene Punkt P liegt voraussetzungsgemäß in der Ebene E. Sei X ein weiterer Punkt der Ebene mit Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}$. Dann liegt auch der Vektor $(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}})$ in E, und es folgt wegen $(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}}) \perp \underline{\mathbf{n}}$ unmittelbar

$$(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0\,.$$

Ausrechnen liefert

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$-2\,x + y + 2\,z + 3 = 0\,,$$

woraus man die Gleichung der Ebene zu

$$z(x,y) \;=\; x \;-\; \tfrac{1}{2}\,y \;-\; \tfrac{3}{2}$$

erhält.

Aufgabe 1.5

Die Dreiecksfläche ergibt sich als die halbe Fläche desjenigen Parallelogramms, welches unter anderem durch die Vektoren $(\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}})$ und $(\underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}})$ aufgespannt wird:

$$(\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}) \times (\underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}}) \;=\; \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\,\left\| (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}) \times (\underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}}) \right\| \\ &= \tfrac{1}{2}\,\sqrt{0^2 + 0^2 + 28^2} \\ &= 14\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

$$\left.\begin{aligned} R_{\mathrm{x}} &= -\ 89{,}9\,\mathrm{N} \\ R_{\mathrm{y}} &= \ 228{,}7\,\mathrm{N} \end{aligned}\right\} \quad R \;=\; 245{,}7\,\mathrm{N}\,, \quad \text{mit } 21{,}46^\circ \text{ gegen die } y\text{-Achse}$$

Aufgabe 2.2

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{x},3} &= 5\,\mathrm{kN} \\ F_{\mathrm{y},3} &= -2\,\mathrm{kN} \end{aligned}\right\} \quad F_3 \;=\; 5{,}385\,\mathrm{kN}\,, \quad \alpha \;=\; -\,21{,}8^\circ$$

Aufgabe 2.3

Im Koordinatensystem mit $\xrightarrow{x}$ und $\downarrow_z$ erhält man

$R_{\mathrm{x}} \;=\; 3{,}914\,\mathrm{kN}\,, \quad R_{\mathrm{z}} \;=\; 13{,}311\,\mathrm{kN}\,.$

Damit folgt

a) $R \;=\; 13{,}875\,\mathrm{kN}\,,$

b) nein, wegen $R_{\mathrm{x}} \;\neq\; 0\,.$

Aufgabe 2.4

$$\alpha \;>\; \alpha_{\mathrm{krit}} \;=\; \arcsin\left[\frac{Q}{2\,S_{\mathrm{krit}}}\right] \;=\; \arcsin\left[\frac{12}{2\cdot 25}\right] \;=\; 13{,}9^\circ$$

Aufgabe 2.5

Wegen $a = h$ ist $\alpha = 45^\circ$ bzw. $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit kommt man auf

$$\ell \;=\; \frac{G}{G \,-\, \frac{S_1}{\sqrt{2}}}\; h \;=\; 5{,}36\,\mathrm{m}\,.$$

Aufgabe 3.1

Die vektorielle Lösung lautet

$$\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{R}}\,[0] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1\,x_1 - F_2\,y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49{,}5 \end{pmatrix} \mathrm{N\,m}\,.$$

Aufgrund des ebenen Problems läßt sich

$$M_{\mathrm{R}}\,[0] = F_1\,x_1 - F_2\,y_2 = -49{,}5\,\mathrm{N\,m}$$

aber auch sofort hinschreiben, wenn man bedenkt, daß die positive Drehrichtung nach der **2. Rechte-Hand-Regel** hier gegen den Uhrzeigersinn gerichtet ist.

Aufgabe 3.2

Wird der positive Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn gewählt, gilt

$$M_{\mathrm{R}}\,[\mathrm{P}] = F_1\,a - F_2 \cdot 2\,a + F_3 \cdot 2\,a = 3\,F\,a\,.$$

Aufgabe 3.3

Wird der positive Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn gewählt, gilt

$$M_{\mathrm{R}}\,[\mathrm{A}] = F\,\cos\alpha \cdot 2\,a - F\,\sin\alpha \cdot 2\,a = 2\,F\,a\,\big(\cos\alpha - \sin\alpha\big)\,.$$

Aufgabe 3.4

Wird der positive Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn gewählt, folgt je nach Vorgehensweise entweder

$$M_{\mathrm{R}}\,[\mathrm{P}] = -F_1\,(\ell_1 + \ell_2)\big(\cos\alpha + \sin\alpha\,\tan\alpha\big) + \\ + F_2\,\ell_2\,\big(\sin[\beta-\alpha] + \cos[\beta-\alpha]\,\tan\alpha\big) - F_3\,\ell_3$$

oder

$$M_{\mathrm{R}}\,[\mathrm{P}] = -F_1\,\frac{\ell_1 + \ell_2}{\cos\alpha} + F_2\,\ell_2\,\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} - F_3\,\ell_3\,,$$

was sich aber auch nach den Gesetzen der Trigonometrie ineinander überführen läßt.

Aufgabe 3.5

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{5} \underline{\mathbf{F}}_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} F$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{R}}\,[0] = \sum_{i=1}^{5} \underline{\mathbf{r}}_i \times \underline{\mathbf{F}}_i = \begin{pmatrix} -2 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} F\,a$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{R}}\,[\mathrm{P}] = \sum_{i=1}^{5} (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}}) \times \underline{\mathbf{F}}_i = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} F\,a$$

Aufgabe 3.6

$$M_{\mathrm{Tret}} = F\,\ell_1\,, \qquad Z = 2\,F\,\frac{\ell_1}{d_1}\,, \qquad M_{\mathrm{HR}} = F\,\ell_1\,\frac{d_2}{d_1}\,, \qquad F_{\mathrm{Vor}} = F\,\frac{d_2}{d_1}\,\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

Aufgabe 3.7

	Antragung:
$A_{\mathrm{x}} = 0$	$\leftarrow$
$A_{\mathrm{y}} = F$	$\uparrow$
$M_{\mathrm{A}} = \frac{1}{8}\,F\,\ell$	$\curvearrowleft$

Aufgabe 3.8

	Antragung:
$A_{\mathrm{x}} = 2\,F\,\frac{\ell}{d}$	$\leftarrow$
$A_{\mathrm{y}} = F$	$\uparrow$
$B = 2\,F\,\frac{\ell}{d}$	$\rightarrow$

Aufgabe 3.9

	Antragung:	
$N_1 = \frac{G}{2}\big(\cos\alpha + \frac{h}{\ell}\,\sin\alpha\big)$	$\nwarrow$	(Normalkraft, links/unten)
$N_2 = \frac{G}{2}\big(\cos\alpha - \frac{h}{\ell}\,\sin\alpha\big)$	$\nwarrow$	(Normalkraft, rechts/oben)
$H = G\,\sin\alpha$	$\nearrow$	(Haltekraft am Puffer)

Aufgabe 3.10

	Antragung:	
$A_x = F$	$\rightarrow$	
$A_y = \frac{1}{2} F$	$\uparrow$	
$M_A = 0$	$\curvearrowleft$	
$B = \frac{1}{2} F$	$\uparrow$	
$G_x = F$	$\leftarrow$	(am linken Teilkörper)
$G_y = \frac{1}{2} F$	$\uparrow$	(am linken Teilkörper)

Aufgabe 3.11

	Antragung:	
$A = -\frac{1}{2} F$	$\uparrow$	
$B_x = F$	$\leftarrow$	
$B_y = \frac{3}{2} F$	$\uparrow$	
$M_B = 2\,F\,a$	$\curvearrowright$	
$G_x = -\,F$	$\rightarrow$	(am linken Teilkörper)
$G_y = \frac{1}{2} F$	$\uparrow$	(am linken Teilkörper)

Aufgabe 3.12

$$S(\alpha) = \frac{G}{2} \, \frac{\cos\alpha}{\sin\left[\,\frac{1}{2}\,(90^\circ + \alpha)\right]}$$

Aufgabe 3.13

	Antragung:	
$A_x = 2\,F\,\tan[\alpha - 90^\circ]$	$\rightarrow$	
$A_y = -\,F$	$\uparrow$	
$B_x = -2\,F\,\tan[\alpha - 90^\circ]$	$\leftarrow$	(am Stab)
$B_y = -2\,F$	$\uparrow$	(am Stab)
$C_x = -2\,F\,\tan[\alpha - 90^\circ]$	$\rightarrow$	(am Stab)
$C_y = -2\,F$	$\downarrow$	(am Stab)
$S = -\frac{2\,F}{\cos[\,\alpha - 90^\circ]}$		(als Zugkraft)

Aufgabe 3.14

Antragung:

$A_x = m_G\, g\, \frac{s_W - s_G}{2b}$ $\rightarrow$

$A_y = 2\, m_G\, g$ $\uparrow$

$B = m_G\, g\, \frac{s_G - s_W}{2b}$ $\rightarrow$

$G_{1,x} = G_{2,x} = m_G\, g\, \frac{s_W}{2b}$ $\xleftarrow{G_{1,x}}$ $\xrightarrow{G_{2,x}}$ (am Horizontalbalken)

$G_{3,x} = G_{4,x} = m_G\, g\, \frac{s_G}{2b}$ $\xrightarrow{G_{3,x}}$ $\xleftarrow{G_{4,x}}$ (am Horizontalbalken)

$G_{1,y} = G_{3,y} = m_G\, g$ $\downarrow$ (am Horizontalbalken)

$G_{2,y} = G_{4,y} = 0$ $\downarrow$ (am Horizontalbalken)

$m_W = m_G$ (unabhängig von s_W und s_G!)

Aufgabe 3.15

Antragung:

$A_x = \frac{1}{9}\left(-5\,F_1 + 2\,F_2 + 2\,F_3 + F_4\right)$ $\rightarrow$
$= 13{,}\overline{3}$ kN

$A_y = \frac{1}{6}\left(-2\,F_1 + 5\,F_2 + 2\,F_3 + F_4\right)$ $\uparrow$
$= 47{,}5$ kN

$B_x = \frac{1}{9}\left(-4\,F_1 - 2\,F_2 - 2\,F_3 + 8\,F_4\right)$ $\rightarrow$
$= -13{,}\overline{3}$ kN

$B_y = \frac{1}{6}\left(2\,F_1 + F_2 + 4\,F_3 - F_4\right)$ $\uparrow$
$= 42{,}5$ kN

$C_x = \frac{1}{9}\left(4\,F_1 + 2\,F_2 + 2\,F_3 + F_4\right)$ $\leftarrow$ (am linken Teilkörper)
$= 28{,}\overline{3}$ kN

$C_y = \frac{1}{6}\left(2\,F_1 + F_2 - 2\,F_3 - F_4\right)$ $\uparrow$ (am linken Teilkörper)
$= -7{,}5$ kN

Aufgabe 3.16

$A_x = 0, \quad A_y = 4\,F, \quad B = 4\,F,$

$S_1 = -3\,F, \quad S_2 = 3\sqrt{2}\,F, \quad S_3 = -3\,F, \quad S_4 = -4\,F, \quad S_5 = \sqrt{2}\,F,$

$S_6 = 3\,F, \quad S_7 = -2\,F, \quad S_8 = -4\,F, \quad S_9 = \sqrt{2}\,F, \quad S_{10} = 3\,F,$

$S_{11} = -3\,F, \quad S_{12} = -3\,F, \quad S_{13} = 3\sqrt{2}\,F$

Aufgabe 3.17

$A_x = F, \quad A_y = 3\,F, \quad B = 3\,F,$

$S_1 = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,F, \quad S_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,F, \quad S_3 = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,F, \quad S_4 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,F,$

$S_5 = 0\,, \quad S_6 = 0\,, \quad S_7 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,F, \quad S_8 = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,F,$

$S_9 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)F, \quad S_{10} = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 1\right)F, \quad S_{11} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,F$

Aufgabe 4.1

Antragung:

$$A_\mathrm{x} = \tfrac{1}{3}\,\varrho g\, b h^2 \qquad \rightarrow$$

$$A_\mathrm{z} = mg - \tfrac{1}{6}\,\varrho g\, b h^2 \qquad \uparrow$$

$$S = -\tfrac{\sqrt{2}}{6}\,\varrho g\, b h^2 \qquad \swarrow \qquad \text{(am Wehr)}$$

Aufgabe 4.2

Bezeichnet man das Lager bei $x = 0$ mit A und dasjenige bei $x = \ell$ mit B, so erhält man

Antragung:

$$A_\mathrm{x} = 0 \qquad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} A_\mathrm{z} &= \int_0^\ell q(x)\,\mathrm{d}x \; - \; B \qquad \uparrow \\ &= q_0\ell\left(\frac{a_4}{5} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0\right) - B \\ &= 3564\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\ell}\int_0^\ell q(x)\,x\,\mathrm{d}x \qquad \uparrow \\ &= q_0\ell\left(\frac{a_4}{6} + \frac{a_3}{5} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{2}\right) \\ &= 3904\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

$$x_\mathrm{S} = \frac{B\,\ell}{A_\mathrm{z} + B} = 6{,}273\ \mathrm{m}$$

Aufgabe 4.3

$$\begin{aligned} F &= \iint_A p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= p_1 \int_0^L \sin\!\left[c\,\tfrac{y}{L} + d\right] \int_0^\ell \cos\!\left[a\,\tfrac{x}{\ell} + b\right]\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \; + \; p_0 \int_0^L\!\!\int_0^\ell \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= p_1\,\tfrac{L}{c}\,\tfrac{\ell}{a}\,\big(\cos[d] - \cos[c+d]\big)\big(\sin[a+b] - \sin[b]\big) + p_0\,L\ell \\ &= 6173{,}8\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{F}\iint\limits_A p(x,y)\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{p_1}{F}\int\limits_0^L \sin\!\left[c\,\tfrac{y}{L}+d\right]\int\limits_0^\ell \cos\!\left[a\,\tfrac{x}{\ell}+b\right]x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;+\; \frac{p_0}{F}\int\limits_0^L\int\limits_0^\ell x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{p_1}{F}\,\tfrac{L}{c}\,\tfrac{\ell^2}{a^2}\big(\cos[d]\,-\,\cos[c+d]\big)\big(\cos[a+b]\,+\,a\,\sin[a+b]\,-\,\cos[b]\big)\;+\;\tfrac{p_0}{2F}\,L\ell^2 \\
&= 10{,}125\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{F}\iint\limits_A p(x,y)\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{p_1}{F}\int\limits_0^L \sin\!\left[c\,\tfrac{y}{L}+d\right]y\int\limits_0^\ell \cos\!\left[a\,\tfrac{x}{\ell}+b\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;+\; \frac{p_0}{F}\int\limits_0^L y\int\limits_0^\ell \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \tfrac{p_1}{F}\,\tfrac{L^2}{c^2}\,\tfrac{\ell}{a}\big(\sin[c+d]\,-\,c\,\cos[c+d]\,-\,\sin[d]\big)\big(\sin[a+b]\,-\,\sin[b]\big)\;+\;\tfrac{p_0}{2F}\,L^2\ell \\
&= 14{,}063\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.4

$$x_S = 0 \quad (\text{Symmetrie!}), \qquad y_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} A_i\,y_i}{\sum\limits_{i=1}^{2} A_i} = \frac{1}{2}\,\frac{a\,b^2\,+\,(c^2-b^2)\,d}{a\,b\,+\,(c-b)\,d}$$

Aufgabe 4.5

$$x_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} A_i\,x_i}{\sum\limits_{i=1}^{2} A_i} = -\,2{,}095\ \mathrm{mm}\,, \qquad y_S = 0 \quad (\text{Symmetrie!})$$

Aufgabe 4.6

$$x_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} \varrho_i\,V_i\,x_i}{\sum\limits_{i=1}^{3} \varrho_i\,V_i} = -\,11{,}925\ \mathrm{mm}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \varrho_i \, V_i \, y_i}{\sum_{i=1}^{3} \varrho_i \, V_i} = -\,13{,}717 \text{ mm}$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \varrho_i \, V_i \, z_i}{\sum_{i=1}^{3} \varrho_i \, V_i} = 0{,}034 \text{ mm}$$

Aufgabe 4.7

$$z_S = \frac{\pi \int\limits_{-R}^{0} z \, (R^2 - z^2) \, \mathrm{d}z}{\pi \int\limits_{-R}^{0} (R^2 - z^2) \, \mathrm{d}z} = -\,\frac{3}{8}\,R$$

Aufgabe 5.1

$\alpha \;\leqslant\; \arctan[\mu_0]$

Aufgabe 5.2

$$\mu_0 \;\geqslant\; \frac{a + b}{h + b/\tan\alpha} \;=\; 0{,}63$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^* &= \arctan[a/h] = 72{,}35° \\ \mu_0^* &\geqslant a/h = 3{,}143 \end{aligned}\right\}$$ (keine realistischen Werte!)

Aufgabe 5.3

$$\ell \;\leqslant\; L\,\frac{(\tan\alpha + \mu_{0,1})\,\mu_{0,2}}{1 + \mu_{0,1}\,\mu_{0,2}}$$

Aufgabe 5.4

$\alpha \;\leqslant\; \arctan[2\mu_0]$

Aufgabe 5.5

a) $M_\mathrm{R} \;=\; F\,\ell\,\dfrac{d}{2\left(\frac{a}{\mu} + b\right)}$ (ablaufende Bremse bei **Rechtslauf**)

$M_\mathrm{L} \;=\; F\,\ell\,\dfrac{d}{2\left(\frac{a}{\mu} - b\right)}$ (auflaufende Bremse bei **Linkslauf**)

b) $b \;=\; 0$ $\left(M_\mathrm{R} = M_\mathrm{L} = F\,\ell\,\mu\,\frac{d}{2a}\right)$

c) $b \;\to\; \dfrac{a}{\mu}$ nur bei Linkslauf! $(M_\mathrm{L} \to \infty)$

Aufgabe 5.6

a) $L \;=\; 385\ \mathrm{N}$

b) $\alpha^* \;=\; 200{,}5°$

Aufgabe 5.7

$$F = mg\,\exp\left[-\mu\,\tfrac{3}{2}\pi\right]$$

Aufgabe 5.8

$$(M_\mathrm{R})_\mathrm{max} = F\,\ell\,\Big(\exp[\mu_0\,\alpha] - 1\Big)$$

$$(M_\mathrm{L})_\mathrm{max} = F\,\ell\,\Big(1 - \exp[-\mu_0\,\alpha]\Big)$$

$$\frac{(M_\mathrm{R})_\mathrm{max}}{(M_\mathrm{L})_\mathrm{max}} = 4{,}81 \qquad (\alpha = \tfrac{5}{4}\pi \text{ war der Zeichnung zu entnehmen!})$$

Aufgabe 5.9

a) $$M_\mathrm{R} = F\,\ell\,\frac{r}{b}\,\frac{\exp[\mu_0\,\alpha] - 1}{\exp[\mu_0\,\alpha] + \frac{a}{b}}$$

$$M_\mathrm{L} = F\,\ell\,\frac{r}{a}\,\frac{\exp[\mu_0\,\alpha] - 1}{\exp[\mu_0\,\alpha] + \frac{b}{a}}$$

b) $a = b$

c) nein

Aufgabe 6.1

Alle drei Stäbe werden entsprechend ihrer Numerierung mit lokal definierten Längskoordinaten x_1, x_2, x_3 versehen. Die Zählung erfolgt vom Gelenk aus nach unten, rechts bzw. links/oben. Damit erhält man für die Normalkräfte

$$N_1(x_1) \equiv m_2\,g \qquad \text{für} \quad \forall\, x_1 \in \,]0, \ell_1[$$

$$N_2(x_2) \equiv (m_1 + m_2)\,g\,\tan\alpha \qquad \text{für} \quad \forall\, x_2 \in \,]0, \ell_2[$$

$$N_3(x_3) \equiv \frac{m_1 + m_2}{\cos\alpha}\,g \qquad \text{für} \quad \forall\, x_3 \in \,]0, \ell_3[$$

Die Berechnung von Querkräften und Biegemomenten erübrigt sich bei Stäben, da diese trivialerweise $\equiv 0$ ausfallen.

Aufgabe 6.2

a)

Die Abwinkelung erzwingt eine Bereichsgrenze. Als **Bereich I** mit lokalem Koordinatensystem x_1, z_1 wurde das horizontale Balkenstück von $x_1 = 0$ (Lager A) bis $x_1 = 2\ell$ (Abwinkelung) definiert. **Bereich II** mit lokalem Koordinatensystem x_2, z_2 erstreckt sich über das vertikale Balkenstück von $x_2 = 0$ (Abwinkelung) bis $x_2 = \ell$ (freies Ende). Die Definitionsfaser liegt damit unten bzw. rechts.[1]

Man erhält

$$\left.\begin{aligned} N(x_1) &\equiv -F \\ Q(x_1) &\equiv F \\ M(x_1) &= F\,(x_1 - \ell) \end{aligned}\right\} \qquad \text{für} \quad \forall\, x_1 \in \,]0, 2\ell\,[\;, \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x_2) &\equiv -F \\ Q(x_2) &\equiv -F \\ M(x_2) &= F\,(\ell - x_2) \end{aligned}\right\} \qquad \text{für} \quad \forall\, x_2 \in \,]0, \ell\,[\;. \tag{II}$$

b)

Die lokalen Koordinatensysteme x_1, z_1 (horizontales Balkenstück) und x_2, z_2 (vertikales Balkenstück) werden genauso wie unter **a)** definiert. Außer der Abwinkelung, die ja auch ohne die dort ansässige Kraft F für eine Bereichsgrenze sorgen würde, wird hier noch eine weitere Bereichsgrenze bei $x_1 = \ell$ (Angriffspunkt der dort wirkenden Kraft F) erforderlich. Es wird somit definiert:

Bereich I :	$x_1 = 0$	(Lager A)	bis	$x_1 = \ell$	(Kraft F),
Bereich II :	$x_1 = \ell$	(Kraft F)	bis	$x_1 = 2\ell$	(Abwinkelung),
Bereich III :	$x_2 = 0$	(Abwinkelung)	bis	$x_2 = \ell$	(Lager B).

[1] Entspricht der Situation in Beispiel 6.6

Die Schnittgrößen lauten hier

$$\left.\begin{aligned} N(x_1) &\equiv 0 \\ Q(x_1) &\equiv 0 \\ M(x_1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x_1 \in \,]0, \ell\,[\;, \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x_1) &\equiv 0 \\ Q(x_1) &\equiv -F \\ M(x_1) &= F\,(\ell - x_1) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x_1 \in \,]\ell, 2\ell\,[\;, \qquad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x_2) &\equiv F \\ Q(x_2) &\equiv F \\ M(x_2) &= F\,(x_2 - \ell) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x_2 \in \,]0, \ell\,[\;. \qquad \text{(III)}$$

Aufgabe 6.3

a)

Es wird ein globales Koordinatensystem mit Ursprung in Lager A festgelegt. Die Längskoordinate x zeigt dabei nach links, die Querkoordinate z nach unten. Bereichsgrenzen werden durch die eingeprägte Kraft F bei $x = \ell$ sowie durch die Lagerkraft B bei $x = 2\ell$ erzwungen. Damit werden drei Bereiche festgelegt:

Bereich I : $x = 0$ (Lager A) bis $x = \ell$ (Kraft F),
Bereich II : $x = \ell$ (Kraft F) bis $x = 2\,\ell$ (Lager B),
Bereich III : $x = 2\,\ell$ (Lager B) bis $x = 3\,\ell$ (freies Ende).

Die Schnittgrößen ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv -F\,\cos\alpha \\ Q(x) &\equiv \tfrac{1}{2}\big(1 - \sin\alpha\big)F \\ M(x) &= \tfrac{1}{2}\big(1 - \sin\alpha\big)F\,x \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]0, \ell\,[\;, \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv -F\,, \cos\alpha \\ Q(x) &\equiv -\tfrac{1}{2}\big(1 + \sin\alpha\big)F \\ M(x) &= -\tfrac{1}{2}\big(1 + \sin\alpha\big)F\,x + F\,\ell \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]\ell, 2\ell\,[\;, \qquad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv -F\,, \cos\alpha \\ Q(x) &\equiv F\,\sin\alpha \\ M(x) &= F\,\sin\alpha\,(x - 3\,\ell) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]2\ell, 3\ell\,[\;. \qquad \text{(III)}$$

b)

Es gibt keine Singularitäten zwischen $x = 0$ und $x = \ell$, daher nur ein Bereich. Die Schnittgrößen lauten

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv 0 \\ Q(x) &= q_0\,\ell \left(-\,\frac{x}{\ell} + \frac{1}{2}\right) \\ M(x) &= \frac{q_0\,\ell^2}{2}\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{x}{\ell}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]\,0, \ell\,[\ .$$

Aufgrund der Gleichungen (6.2) und (6.4) erhält man wegen $q(x) \equiv q_0 = \text{const}$ erwartungsgemäß einen linearen Verlauf für $Q(x)$ und eine quadratische Parabel für $M(x)$. Das maximale Biegemoment liegt mit

$$M_{\max} = M(x = \ell/2) = \frac{q_0\,\ell^2}{8}$$

auf Balkenmitte.

c)

Die Unstetigkeit (Sprung) im Verlauf der Streckenlast bei $x = \ell$ erfordert an dieser Stelle eine Bereichsgrenze, so daß hier zwei Bereiche mit

Bereich I : $x = 0$ (Lager A) bis $x = \ell$ (Sprung),
Bereich II : $x = \ell$ (Sprung) bis $x = 2\,\ell$ (freies Ende),

vorliegen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv 0 \\ Q(x) &= q_0\,\ell \left(-\,\frac{x}{\ell} + 3\right) \\ M(x) &= \frac{q_0\,\ell^2}{2}\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 6\,\frac{x}{\ell} - 7\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]\,0, \ell\,[\ , \qquad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv 0 \\ Q(x) &= 2\,q_0\,\ell \left(-\,\frac{x}{\ell} + 2\right) \\ M(x) &= q_0\,\ell^2\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\,\frac{x}{\ell} - 4\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]\,\ell, 2\ell\,[\ . \qquad (\mathrm{II})$$

d)

Hier ist wieder nur ein Bereich erforderlich, und das Ergebnis lautet

$$\left.\begin{aligned} N(x) &\equiv 0 \\ Q(x) &= \frac{q_0\,\ell}{2}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\,\frac{x}{\ell} + 1\right] \\ M(x) &= \frac{q_0\,\ell^2}{6}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 3\,\frac{x}{\ell} - 1\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \forall\, x \in \,]0,\ell\,[\; .$$