TM II

Aufgabe 7.1

Man zeige

$$v_i \, \delta_{ij} \;=\; v_j$$

und berechne ferner

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \;=\; \ldots$$

durch Ausschreiben.

Aufgabe 7.2

Man ermittle

$$\delta_{ij} \, \delta_{ij} \;=\; \ldots$$

und zeige, daß dies der Spur von Einheitstensor bzw. -matrix entspricht.

Aufgabe 7.3

Man formuliere die Tensoren $\mathbf{E}^{(4)}$ und $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ in indizierter Komponentenschreibweise und berechne das doppelt verjüngende Produkt

$$\mathbf{E}^{(4)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \;=\; \ldots$$

Welche Tensorstufe ist für das Ergebnis zu erwarten (Begründung)?

Aufgabe 7.4

Der Tensor $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ sei im $\mathbb{E}^2$ durch seine kartesischen Koordinaten σ_{ij} (mit $i, j = 1, 2$) gegeben. Man berechne unter Verwendung der Orthogonal-Transformationskoeffizienten nach Kapitel 1

$$a_{11} \;=\; a_{22} \;=\; \cos\varphi \,, \qquad a_{12} \;=\; \sin\varphi \,, \qquad a_{21} \;=\; -\sin\varphi$$

die transformierten Koordinaten $\sigma^*_{k\ell}$. Man zeige ferner die Rücktransformation für gegebene σ^*_{ij}.

Aufgabe 8.1

Für einen Raumpunkt im kartesischen Koordinatensystem sei der Spannungszustand durch die Spannungsmatrix

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 100\,\mathrm{MPa}$$

gegeben. Man berechne den Spannungsvektor $\underline{\mathbf{t}}$ zu derjenigen Ebene, die durch den Normaleneinheitsvektor

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Wie groß ist der Betrag von $\underline{\mathbf{t}}$?

Aufgabe 8.2

Für einen Raumpunkt im kartesischen Koordinatensystem sei der Spannungszustand durch

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{x}} &= 200\ \mathrm{MPa}\,, & \tau_{\mathrm{xy}} &= \tau_{\mathrm{yx}} = -200\ \mathrm{MPa}\,, \\
\sigma_{\mathrm{y}} &= 300\ \mathrm{MPa}\,, & \tau_{\mathrm{yz}} &= \tau_{\mathrm{zy}} = 200\ \mathrm{MPa}\,, \\
\sigma_{\mathrm{z}} &= 200\ \mathrm{MPa}\,, & \tau_{\mathrm{zx}} &= \tau_{\mathrm{xz}} = 100\ \mathrm{MPa}
\end{aligned}$$

gegeben. Man berechne

a) die Invarianten,

b) die Hauptspannungen,

c) die Basisvektoren des Hauptachsensystems sowie

d) den Spannungsvektor auf der Ebene mit

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.3

Für einen Raumpunkt im kartesischen Koordinatensystem sei der Spannungszustand durch die Spannungsmatrix

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot 100\,\text{MPa}$$

gegeben. Ist dieser Spannungszustand räumlich, eben oder einachsig? Man berechne die Eigenwerte.

Aufgabe 8.4

Für die ebenen Spannungszustände nach a) und b) sind MOHRsche Spannungskreise zu zeichnen. Man bestimme die Hauptspannungen und zeichne die Schnittbilder mit den schubspannungsfreien Ebenen.

a)
$$\sigma_\text{x} = 200\,\text{MPa}$$
$$\sigma_\text{y} = 0$$
$$\tau_\text{xy} = \tau_\text{yx} = 100\,\text{MPa}$$

b)
$$\sigma_\text{x} = -500\,\text{MPa}$$
$$\sigma_\text{y} = -100\,\text{MPa}$$
$$\tau_\text{xy} = \tau_\text{yx} = 300\,\text{MPa}$$

Aufgabe 8.5

Ein schlanker Stab mit Vollkreisquerschnitt (∅ 45 mm) der Länge $\ell = 8500$ mm mit Dichte $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3 ist in vertikaler Anordnung an seinem oberen Ende ($x = 0$) gelenkig befestigt. Am unteren Ende ($x = \ell$) wirkt die eingeprägte Zugkraft $F = 7500$ N. Man bestimme den Spannungszustand bei $x = \ell/3$ und zeichne den MOHRschen Spannungskreis.

Welche Werte für σ und $|\tau|$ ergeben sich nach MOHRschen Spannungskreis, wenn die Schnittfläche bezüglich der Normalschnittebene um den Winkel $\beta = 25°$ gegen den Uhrzeigersinn verschwenkt ist?

Aufgabe 10.1

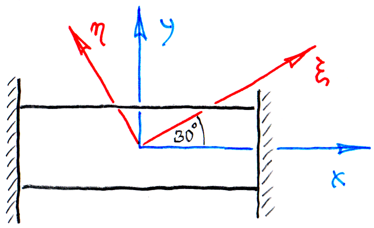
Im Inneren eines HOOKEschen Festkörpers ($E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0{,}3$) sei für einen bestimmten Körperpunkt der Spannungszustand durch die Spannungsmatrix

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 100\,\text{MPa}$$

gegeben. Man bestimme die zugehörige (klassische) Verzerrungsmatrix $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Aufgabe 10.2

Zwischen zwei starren, unverschieblichen Wänden ist bei einer Temperatur ϑ_0 ein Quader aus isotropem, linearelastischen Material (E, ν) ohne Spiel eingepaßt worden:



Für den Fall einer gleichmäßigen Erwärmung um $\Delta\vartheta$ kann von einem gleichförmigen Spannungs- und Dehnungszustand über dem Körpervolumen ausgegangen werden. Man berechne für diesen Fall

a) die Spannung σ_{x} ,

b) die Dehnungen ε_{ξ} und ε_{η} .

Das ξ, η-Koordinatensystem ist gegenüber dem x, y-System um 30° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

gegeben: E, ν, α, $\Delta\vartheta$

Aufgabe 10.3

Gegeben ist ein Belastungsfall mit der Spannungsmatrix

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10\,\text{MPa}$$

Man prüfe, ob hier 2-fache Sicherheit gegen Fließen nach TRESCA vorliegt.

gegeben: $\sigma_{\mathrm{F}} = 650$ MPa

Aufgabe 10.4

Bei Belastung eines dünnwandigen Rohres durch Zug und gleichzeitige Torsion lautet die Spannungsmatrix

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dabei repräsentiert die x-Koordinate die Axial- und die y-Koordinate die (lokale) Tangentialrichtung.

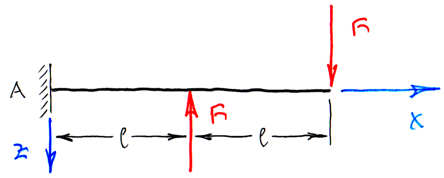
Für diesen Belastungsfall stelle man die Fließbedingungen nach Tresca und Huber-v. Mises auf. Gesucht ist ferner derjenige Wert der (zugbedingten) Normalspannung σ, welcher für gegebene (torsionsbedingte) Schubspannung τ mit Fließbeginn verbunden ist.

gegeben: $\tau = 145$ MPa, $\sigma_\mathrm{F} = 300$ MPa

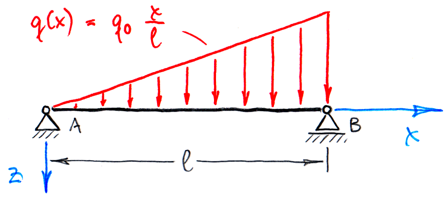
Aufgabe 11.1

Man ermittle die Biegelinien für die folgenden Fälle:

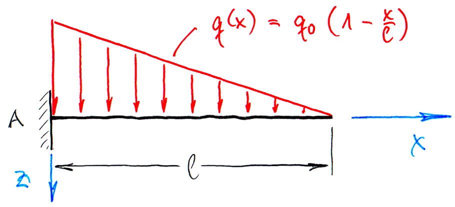
a)



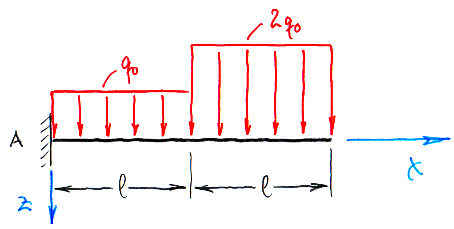
b)



c)



d)

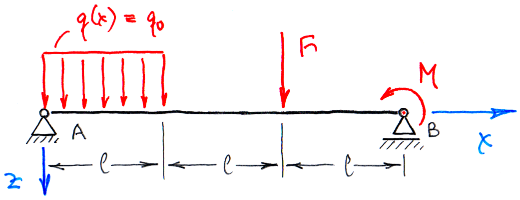


gegeben: F bzw. q_0, ℓ, E, I_y

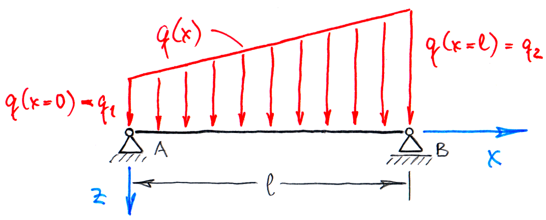
Aufgabe 11.2

Man ermittle die Biegelinien für die folgenden Fälle:

a)



b)

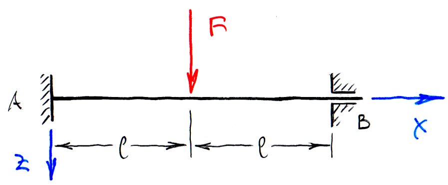


gegeben: F, M, q_0, q_1, q_2, ℓ, E, I_y

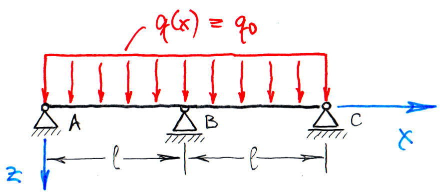
Aufgabe 11.3

Für die nachfolgenden Fälle sind die Biegelinien und Lagerreaktionen zu ermitteln:

a)



b)



(Man beachte, dass der Balken bei B durchlaufend ist!)

gegeben: F bzw. q_0, ℓ, E, I_y