Lösungen zu TM II

Aufgabe 7.1

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & v_i\,\delta_{ij} & = & & & & & & \\
j = 1: & v_1\,\delta_{11} & + & v_2\,\delta_{21} & + & v_3\,\delta_{31} & & & \\
 & v_1 \cdot 1 & + & v_2 \cdot 0 & + & v_3 \cdot 0 & = & v_1 \\
j = 2: & v_1\,\delta_{12} & + & v_2\,\delta_{22} & + & v_3\,\delta_{32} & & & \\
 & v_1 \cdot 0 & + & v_2 \cdot 1 & + & v_3 \cdot 0 & = & v_2 \\
j = 3: & v_1\,\delta_{13} & + & v_2\,\delta_{23} & + & v_3\,\delta_{33} & & & \\
 & v_1 \cdot 0 & + & v_2 \cdot 0 & + & v_3 \cdot 1 & = & v_3
\end{array}
$$

Aufgabe 7.2

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \\
&\quad + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\,\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\,\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \\
&\quad + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\,\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\,\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\
&= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)^2 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.3

$$\mathbf{E}^{(4)} =: E_{ijk\ell}\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_k\,\mathbf{e}_\ell\ , \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} =: \varepsilon_{mn}\ \mathbf{e}_m\,\mathbf{e}_n$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(4)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} &= (E_{ijk\ell}\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_k\,\mathbf{e}_\ell) : (\varepsilon_{mn}\ \mathbf{e}_m\,\mathbf{e}_n) \\
&= E_{ijk\ell}\,\varepsilon_{mn}\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_k\,\mathbf{e}_\ell : \mathbf{e}_m\,\mathbf{e}_n \\
&= E_{ijk\ell}\,\varepsilon_{mn}\ \delta_{km}\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_n \\
&= E_{ijk\ell}\,\varepsilon_{kn}\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\ \delta_{\ell n} \\
&= \underbrace{E_{ijk\ell}\,\varepsilon_{k\ell}\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j}_{\text{Tensor 2. Stufe}}
\end{aligned}$$

Die tensorielle Multiplikation zwischen einem Tensor 4. Stufe und einem Tensor 2. Stufe ergibt wegen $4 + 2 = 6$ einen Tensor 6. Stufe. Aufgrund der zweifach verjüngenden Multiplikation ($\iota = 2$) ist aber entsprechend

$$4 + 2 - 2\,\iota = 6 - 2 \cdot 2 = 2$$

ein Tensor 2. Stufe zu erwarten!

Aufgabe 7.4

$$\begin{aligned}
\sigma^*_{k\ell} &= a_{ki}\,a_{\ell j}\ \sigma_{ij} \\
&= a_{k1}\,a_{\ell 1}\ \sigma_{11} + a_{k1}\,a_{\ell 2}\ \sigma_{12} + a_{k2}\,a_{\ell 1}\ \sigma_{21} + a_{k2}\,a_{\ell 2}\ \sigma_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^*_{11} &= a_{11}^2\ \sigma_{11} + a_{11}\,a_{12}\ \sigma_{12} + a_{12}\,a_{11}\ \sigma_{21} + a_{12}^2\ \sigma_{22} \\
&= \cos^2\varphi\ \sigma_{11} + 2\cos\varphi\,\sin\varphi\ \sigma_{12} + \sin^2\varphi\ \sigma_{22}
\end{aligned}$$

$$\sigma^*_{22} = \sin^2\varphi\ \sigma_{11} - 2\cos\varphi\,\sin\varphi\ \sigma_{12} + \cos^2\varphi\ \sigma_{22}$$

$$\sigma^*_{12} = \sigma^*_{21} = \cos\varphi\,\sin\varphi\ \big(\sigma_{22} - \sigma_{11}\big) + \big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big)\ \sigma_{12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{k\ell} &= a^*_{ki}\,a^*_{\ell j}\ \sigma^*_{ij} = a_{ik}\,a_{j\ell}\ \sigma^*_{ij} \qquad \big(\text{vgl. (7-23)!}\big) \\
&= a_{1k}\,a_{1\ell}\ \sigma^*_{11} + a_{1k}\,a_{2\ell}\ \sigma^*_{12} + a_{2k}\,a_{1\ell}\ \sigma^*_{21} + a_{2k}\,a_{2\ell}\ \sigma^*_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= a_{11}^2\ \sigma^*_{11} + a_{11}\,a_{21}\ \sigma^*_{12} + a_{21}\,a_{11}\ \sigma^*_{21} + a_{21}^2\ \sigma^*_{22} \\
&= \cos^2\varphi\ \sigma^*_{11} - 2\cos\varphi\,\sin\varphi\ \sigma^*_{12} + \sin^2\varphi\ \sigma^*_{22}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \sin^2\varphi\ \sigma^*_{11} + 2\cos\varphi\,\sin\varphi\ \sigma^*_{12} + \cos^2\varphi\ \sigma^*_{22}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \cos\varphi\,\sin\varphi\ \big(\sigma^*_{11} - \sigma^*_{22}\big) + \big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big)\ \sigma^*_{12}$$

Aufgabe 8.1

$$\underline{\mathbf{t}} \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 100\ \text{MPa}\,, \qquad \|\,\underline{\mathbf{t}}\,\| \;=\; 360{,}5\ \text{MPa}$$

Aufgabe 8.2

a) $I_1 \;=\; 7 \cdot 10^2\ \text{MPa}\,, \quad I_2 \;=\; 7 \cdot 10^4\ \text{MPa}^2\,, \quad I_3 \;=\; -15 \cdot 10^6\ \text{MPa}^3$

b) $\sigma_{\text{I}} \;=\; -1 \cdot 10^2\ \text{MPa}\,, \quad \sigma_{\text{II}} \;=\; 5 \cdot 10^2\ \text{MPa}\,, \quad \sigma_{\text{III}} \;=\; 3 \cdot 10^2\ \text{MPa}$

c) $\mathbf{n}_{\text{I}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{\text{II}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_{\text{III}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\underline{\mathbf{t}} \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot 10\ \text{MPa}$

Aufgabe 8.3

$$\sigma_{\text{I}} \;=\; \left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot 10^2\ \text{MPa} \;=\; 523{,}6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{II}} \;=\; \left(3 - \sqrt{5}\right) \cdot 10^2\ \text{MPa} \;=\; 76{,}4\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{III}} \;=\; 0$$

Da zwei Hauptspannungen $\neq 0$ sind, die dritte aber $= 0$, liegt ein ebener Spannungszustand vor! Die Eigenwerte sind die o. g. Hauptspannungen.

Aufgabe 8.4

a) $\sigma_{\text{I}} \;=\; 241{,}4\ \text{MPa}\,, \quad \sigma_{\text{II}} \;=\; -41{,}4\ \text{MPa}\,, \quad \alpha \;=\; 22{,}5^\circ$

b) $\sigma_{\text{I}} \;=\; 60{,}5\ \text{MPa}\,, \quad \sigma_{\text{II}} \;=\; -660{,}5\ \text{MPa}\,, \quad \alpha \;=\; 28{,}16^\circ$

Aufgabe 8.5

$(\sigma_{\mathrm{x}} \ = \ 5{,}15 \text{ MPa})\,, \quad \sigma \ = \ 4{,}23 \text{ MPa}\,, \quad |\,\tau\,| \ = \ 1{,}973 \text{ MPa}$

Aufgabe 10.1

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{x}} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma_{\mathrm{x}} - \nu\,(\sigma_{\mathrm{y}} + \sigma_{\mathrm{z}})\right] &&= 1{,}76 \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_{\mathrm{y}} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma_{\mathrm{y}} - \nu\,(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{z}})\right] &&= -0{,}095 \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_{\mathrm{z}} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma_{\mathrm{z}} - \nu\,(\sigma_{\mathrm{x}} + \sigma_{\mathrm{y}})\right] &&= -0{,}71 \cdot 10^{-3} \\
\gamma_{\mathrm{xy}} &= 2\,\tfrac{1}{E}\,(1+\nu)\,\tau_{\mathrm{xy}} &&= 2{,}48 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \begin{pmatrix} 1{,}76 & 1{,}24 & 0 \\ 1{,}24 & -0{,}095 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}71 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}
$$

Aufgabe 10.2

a) $\sigma_{\mathrm{x}} = -E\,\alpha\,\Delta\vartheta \qquad (\sigma_{\mathrm{x}} = \sigma_{\mathrm{y}} = 0\,!)$

b)
$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi} &= \tfrac{1}{4}\,(1+\nu)\;\alpha\,\Delta\vartheta \\
\varepsilon_{\eta} &= \tfrac{3}{4}\,(1+\nu)\;\alpha\,\Delta\vartheta
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.3

$\sigma_{\mathrm{I}} = 130\text{ MPa}\,,\quad \sigma_{\mathrm{II}} = -210\text{ MPa}\,,\quad \sigma_{\mathrm{III}} = 0$

$$
\sigma_{\mathrm{V}} = \max\Big[\,|\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}|,\ |\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}|,\ |\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}|\,\Big] = |\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}| = 340\text{ MPa}
$$

$$
\sigma_{\mathrm{zul}} = \frac{\sigma_{\mathrm{F}}}{S_{\mathrm{F}}} = \frac{650\text{ MPa}}{2} = 325\text{ MPa}
$$

Wegen $\sigma_{\mathrm{V}} > \sigma_{\mathrm{zul}}$ liegt hier keine 2-fache Sicherheit gegen Fließen vor.

Aufgabe 10.4

TRESCA: $\quad \sigma = \sqrt{\sigma_{\mathrm{F}}^2 - 4\,\tau^2} = 76{,}8\text{ MPa}$

HUBER-V. MISES: $\quad \sigma = \sqrt{\sigma_{\mathrm{F}}^2 - 3\,\tau^2} = 164\text{ MPa}$

Aufgabe 11.1

a) **Bereich I** : $x = 0$ (Lager A) bis $x = \ell$ (Kraft F)
Bereich II : $x = \ell$ (Kraft F) bis $x = 2\ell$ (freies Ende)

Die Biegelinien ergeben sich zu

$$w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{F\,\ell}{2\,EI_{\mathrm{y}}}\,x^2 \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [0, \ell\,]\,,$$

$$w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{F\,\ell^3}{6\,EI_{\mathrm{y}}}\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\,\frac{x}{\ell} + 1\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [\ell, 2\ell\,]\,.$$

b)
Es gibt keine Singularitäten zwischen $x = 0$ und $x = \ell$, daher nur ein Bereich. Die Biegelinie lautet

$$w(x) = \frac{q_0\,\ell^4}{360\,EI_{\mathrm{y}}}\left[3\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 7\,\frac{x}{\ell}\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [0, \ell\,]\,.$$

c)
Auch hier gibt es keine Singularitäten zwischen $x = 0$ und $x = \ell$, und somit nur einen Bereich. Die Biegelinie lautet

$$w(x) = \frac{q_0\,\ell^4}{360\,EI_{\mathrm{y}}}\left[-3\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 + 15\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 30\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 30\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [0, \ell\,]\,.$$

d) **Bereich I** : $x = 0$ (Lager A) bis $x = \ell$ (Sprung),
Bereich II : $x = \ell$ (Sprung) bis $x = 2\ell$ (freies Ende).

Die Biegelinien lauten hier

$$w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{q_0\,\ell^4}{24\,EI_{\mathrm{y}}}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 12\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 42\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [0, \ell\,]\,,$$

$$w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{q_0\,\ell^4}{24\,EI_{\mathrm{y}}}\left[2\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 16\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 48\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 4\,\frac{x}{\ell} + 1\right]$$
$$\text{für} \quad \forall\, x \in [\ell, 2\ell\,]\,.$$

Aufgabe 11.2

a)

Bereich I :	$x = 0$	(Lager A)	bis	$x = \ell$	(Ende $q(x)$)
Bereich II :	$x = \ell$	(Ende $q(x)$)	bis	$x = 2\,\ell$	(Kraft F)
Bereich III :	$x = 2\,\ell$	(Kraft F)	bis	$x = 3\,\ell$	(Lager B)

Die Biegelinien ergeben sich zu

$$w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{\ell^3}{EI_{\mathrm{y}}}\left[\frac{q_0\,\ell}{24}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{6}\left(\frac{F}{3} + \frac{5}{6}\,q_0\,\ell + \frac{M}{3\,\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{4}{9}\,F + \frac{25}{72}\,q_0\,\ell + \frac{M}{2\,\ell}\right)\frac{x}{\ell}\right] \quad \text{für} \quad \forall\, x \in [0, \ell\,]\,,$$

$$w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{\ell^3}{EI_{\mathrm{y}}}\left[\frac{1}{6}\left(-\frac{F}{3} + \frac{q_0\,\ell}{6} - \frac{M}{3\,\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{q_0\,\ell}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{4}{9}\,F + \frac{37}{72}\,q_0\,\ell + \frac{M}{2\,\ell}\right)\frac{x}{\ell} - \frac{q_0\,\ell}{24}\right] \quad \text{für} \quad \forall\, x \in [\ell, 2\ell\,]\,,$$

$$w_{\mathrm{III}}(x) = \frac{\ell^3}{EI_{\mathrm{y}}}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\,F + \frac{q_0\,\ell}{6} - \frac{M}{3\,\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{q_0\,\ell}{4} + F\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{22}{9}\,F + \frac{37}{72}\,q_0\,\ell + \frac{M}{2\,\ell}\right)\frac{x}{\ell} - \frac{4}{3}\,F - \frac{q_0\,\ell}{24}\right] \quad \text{für} \quad \forall\, x \in [2\ell, 3\ell\,]\,.$$

b)

Es gibt keine Singularitäten zwischen $x = 0$ und $x = \ell$, daher nur ein Bereich. Die Biegelinie lautet

$$w(x) = \frac{q_1\,\ell^4}{360\,EI_{\mathrm{y}}}\left[3\left(\frac{q_2}{q_1} - 1\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 + 15\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 10\left(\frac{q_2}{q_1} + 2\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \left(7\,\frac{q_2}{q_1} + 8\right)\frac{x}{\ell}\right] \quad \text{für} \quad \forall\, x \in [0, \ell\,]\,.$$

Aufgabe 11.3

a) **Bereich I** : $x = 0$ (Lager A) bis $x = \ell$ (Kraft F)
Bereich II : $x = \ell$ (Kraft F) bis $x = 2\ell$ (Lager B)

Die Biegelinien und Lagerreaktionen ergeben sich zu

$$w_{\text{I}}(x) = \frac{F\ell^3}{12\,EI_{\text{y}}}\left[-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [0,\ell]\,,$$

$$w_{\text{II}}(x) = \frac{F\ell^3}{12\,EI_{\text{y}}}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 6\,\frac{x}{\ell} - 2\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [\ell,2\ell]\,,$$

		Antragung:
A	$= \frac{1}{2}F$	$\uparrow$
B	$= \frac{1}{2}F$	$\uparrow$
M_{A}	$= \frac{1}{4}F\ell$	$\curvearrowleft$
M_{B}	$= \frac{1}{4}F\ell\,.$	$\curvearrowright$

b) **Bereich I** : $x = 0$ (Lager A) bis $x = \ell$ (Lager B)
Bereich II : $x = \ell$ (Lager B) bis $x = 2\ell$ (Lager C)

Die Biegelinien und Lagerreaktionen ergeben sich zu

$$w_{\text{I}}(x) = \frac{F\ell^3}{48\,EI_{\text{y}}}\left[2\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{x}{\ell}\right] \qquad \text{für} \quad \forall\, x \in [0,\ell]\,,$$

$$w_{\text{II}}(x) = \frac{F\ell^3}{48\,EI_{\text{y}}}\left[2\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 13\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 30\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 29\,\frac{x}{\ell} + 10\right]$$
$$\text{für} \quad \forall\, x \in [\ell,2\ell]\,,$$

		Antragung:
A	$= \frac{3}{8}q_0\,\ell$	$\uparrow$
B	$= \frac{5}{4}q_0\,\ell$	$\uparrow$
C	$= \frac{3}{8}q_0\,\ell\,.$	$\uparrow$